

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`





L'ALGÈBRE

D'OMAR ALKHAYYÂMÎ,

PUBLIÉE, TRADUITE ET ACCOMPAGNÉE

D'EXTRAITS DE MANUSCRITS INÉDITS,

PAR

F. WOEPCKE,

DOCTEUR AGRÉGÉ A L'UNIVERSITÉ DE BONN, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ASIATIQUE DE PARIS.

PARIS,

BENJAMIN DUPRAT, LIBRAIRE DE L'INSTITUT,

DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE, DES SOCIÉTÉS ASIATIQUES DE PARIS, DE LONDRES ET DE CALCUTTA,

Rue du Cloître-St.-Benoît, 7.

M DCCC LI.

Paris. — Typographie de Firmin Didot Frères, rue Jacob, 56.

181. h. 8.

A SON ALTESSE SÉRÉNISSIME

FRÉDÉRIC,

PRINCE HÉRÉDITAIRE D'ANHALT-DESSAU.

Monseigneur,

Votre Altesse, en permettant que cet opuscule paraisse sous Ses augustes auspices, met le comble au plus cher de mes vœux. L'intérêt flatteur dont Votre Altesse a daigné honorer mes travaux et la faveur qu'Elle a bien voulu accorder à mes efforts

pour être utile à la science, m'inspirent la plus vive gratitude. Puisse ce faible hommage que j'ose mettre aux pieds de Votre Alteſſe, témoigner du profond sentiment de respect avec lequel je suis,

Monseigneur,

de Votre Alteſſe Sérénissime,

le plus humble, le plus obéissant
et le plus dévoué serviteur,

Wurzbe.

PRÉFACE.

Il y a plus d'un siècle que l'algèbre d'Alkhayyâmî fixa pour la première fois l'attention d'un savant mathématicien.

En 1742, *Gérard Meerman* publia à Leyde son « *Specimen calculi fluxionalis,* » précédé d'une préface dans laquelle le célèbre auteur esquisse rapidement, mais avec érudition et élégance, le développement successif du calcul analytique. En parlant des progrès que les Arabes avaient fait faire à cette branche des mathématiques, il cite (*) un manuscrit arabe du traité d'Alkhayyâmî, légué par *Warner* à la bibliothèque de Leyde. Il conjecture que ce manuscrit pourrait bien contenir la résolution algébrique des équations cubiques. Cela n'est pas; car on verra dans la suite que les découvertes d'Alkhayyâmî, quelque ingénieuses qu'elles soient, n'ont rien de commun avec celles des algébristes italiens du seizième siècle. Il est vrai que le titre du manuscrit arabe, tel que le donne le catalogue de la bibliothèque de Leyde, pouvait faire croire le contraire.

En effet, on retrouve la pensée de Meerman chez *Montucla* (**), le savant historien des mathématiques; puis chez *M. Gartz*, auteur d'une dissertation latine sur les traducteurs et commentateurs arabes d'Euclide, publiée en 1823.

Personne cependant n'avait encore pensé à examiner ce traité, signalé ainsi à l'attention des géomètres et des orientalistes, lorsque M. *L.-Am. Sédillot* annonça dans le *Nouveau Journal asiatique* (***) qu'il avait découvert, dans un manuscrit arabe de la Bibliothèque royale, un fragment très-intéressant d'un traité d'algèbre. Le contenu de ce morceau présentait une analogie remarquable avec ce qui, selon toute probabilité, devait former le sujet du manuscrit de Leyde. Quelque temps après, M. Sédillot fit connaître ce

*) Voir la dixième page de sa préface.

**) *Hist. des Math.*, nouv. éd., t. I, p. 383.

***) Mai 1834.

fragment d'une manière plus détaillée dans un mémoire inséré aux *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale* (*).

D'après l'analyse donnée par M. Sédillot, M. *Chasles*, dans l'admirable travail qu'il a consacré à l'histoire de la géométrie, déclara (**) qu'une publication complète de ce fragment serait d'un véritable intérêt pour l'histoire des sciences mathématiques.

Cette opinion sur la valeur du document en question fut évidemment partagée par M. *Libri* (***), qui découvrit à la Bibliothèque royale un manuscrit complet de cet ouvrage. Ce manuscrit constatait en même temps l'identité de son auteur avec celui du traité conservé à la bibliothèque de Leyde (****), et M. Libri annonça qu'il se proposait d'en publier une édition.

Une telle unanimité sur l'importance de l'algèbre d'Alkhayyâmî devait suffire pour me décider à en entreprendre la publication.

Les manuscrits que j'avais à ma disposition pour établir le texte arabe étaient au nombre de trois.

C'était d'abord le manuscrit arabe n° 1136, ancien fonds de la Bibliothèque nationale, celui qui avait été remarqué par M. Libri. Ce manuscrit est d'une écriture très-élégante, mais dépourvu en grande partie des points diacritiques. Des trois manuscrits, c'est celui qui offre le texte le plus correct, et dans les cas douteux j'ai généralement préféré les leçons qu'il présente. Je l'ai désigné dans les indications des variantes par la lettre A.

Le second manuscrit, que j'ai désigné par la lettre B, est le fragment examiné par M. Sédillot, et faisant partie du manuscrit arabe n° 1104, ancien fonds de la Bibliothèque nationale. L'écriture de ce manuscrit est beaucoup moins belle que celle du n° 1136, mais la ponctuation est presque complète, et parfois on y trouve même les voyelles. Le manuscrit est détérioré en quelques endroits, et les coins sont quelquefois endommagés par l'humidité, de manière à en rendre l'écriture illisible. Malheureusement ce fragment ne contient qu'à peine les trois septièmes du texte entier, et s'arrête précisément à l'endroit (*****) où l'auteur va exposer ce qu'il y a de vraiment original et d'intéressant dans son ouvrage, c'est-à-dire au commencement de la construction des équations cubiques.

Enfin, messieurs les conservateurs de la bibliothèque de Leyde ont eu l'extrême bonté de me confier le manuscrit cité par Meerman et Montucla, et contenu dans le volume n° 14 du legs Warnérien. C'est probablement

---

*) Tome XIII, pages 130 à 136.

**) *Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles, 1837, in-4°, pages 493, 494, et particulièrement p. 498, troisième note.

***) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, note XIII, p. 300 sqq.

****) Voir, *loc. cit.*, les notes au bas des pages 301 et 302.

*****) Voir page 21 du texte arabe, note 5.

une copie faite sur un manuscrit oriental par un Arabe chrétien, domicilié à Amsterdam, et occupé par l'illustre *Golius* à copier des manuscrits arabes que les propriétaires refusaient de vendre, et que Golius était obligé de renvoyer en Orient après en avoir fait prendre copie (*). Ce manuscrit, que j'ai désigné par la lettre C, est d'une écriture large et lisible. Quoiqu'il soit moins correct que le manuscrit A, il ne m'en a pas moins été très-utile pour la rédaction du texte.

Les figures géométriques qui accompagnent le texte sont tracées dans le manuscrit A avec assez de netteté; si ce n'est que les sections coniques y sont invariablement représentées par des arcs de cercle qui se rencontrent au sommet de la conique sous un angle passablement aigu. Dans le manuscrit C, ces figures ne ressemblent quelquefois que d'assez loin à ce qu'elles sont destinées à représenter.

Dans les manuscrits B et C, les numératifs sont toujours exprimés par des mots, excepté dans les citations des propositions, et quelquefois aussi des livres, des ouvrages d'Euclide et d'Apollonius. Dans ce dernier cas, les manuscrits B et C emploient les lettres de l'alphabet numéral. C'est uniquement pour la petite table des puissances descendantes et ascendantes (p. 42 du texte arabe) que le manuscrit C fait usage des chiffres. Le manuscrit A, au contraire, se sert de ces derniers presque partout où les deux autres manuscrits emploient des mots ou des lettres numérales; cependant il conserve les lettres exclusivement pour les propositions citées des ouvrages d'Euclide et d'Apollonius.

Ayant rendu compte des manuscrits dont je me suis servi pour l'édition du *texte d'Alkhayyámí*, je vais ajouter quelques mots au sujet des manuscrits dans lesquels j'ai rencontré les morceaux qui forment l'objet des *additions*.

Pour les additions A et C, j'ai mis à contribution le manuscrit n° 14 du legs Warnérien, mentionné ci-dessus. Quant au mémoire, que j'examine dans l'addition C, j'en avais découvert une seconde copie dans le manuscrit 955,2(**), supplément arabe de la Bibliothèque nationale. Les morceaux dont les additions B, D et E présentent des extraits discutés sont tirés du manuscrit n° 168 du legs Warnérien de la bibliothèque de Leyde, un de ceux qui ont été achetés par Golius en Orient (***). Ce manuscrit

*) Voir à ce sujet les pages XIV et XV de la préface du nouveau catalogue de la bibliothèque de Leyde, par M. *Dozy*, dont le premier tome vient de paraître il y a peu de semaines. M. Dozy avait bien voulu m'instruire à l'avance de ces détails, et c'est avec empressement que je saisis cette occasion de témoigner publiquement ma reconnaissance à ce savant, ainsi qu'à M. *Reinaud*, qui non-seulement m'a communiqué, avec la complaisance qui le distingue, tous les manuscrits dont je pouvais avoir besoin, mais encore m'a permis de recourir en toute occasion à sa vaste érudition

**) Numéro du catalogue manuscrit du supplément arabe, rédigé par M. *Reinaud*.

***) J'ai plusieurs fois cité textuellement des passages de ce manuscrit; j'ai alors reproduit ces passages absolument tels qu'ils se trouvaient dans l'original.

m'avait également été prêté par messieurs les conservateurs de cette bibliothèque avec la bienveillance la plus obligeante.

On peut appliquer à Alkhayyâmî ce qu'un historien spirituel de l'algèbre a observé à propos de Diophante : que la fin de son nom prête déjà à discussion. Tantôt on trouve *Alkhayyâmî*, tantôt *Alkhayyâm;* à ce point que sur le premier feuillet du manuscrit A, à côté du grand titre qui porte *Alkhayyâmî*, on lit plus bas(*) : «Mémoire d'Omar *Alkhayyâm* sur les démonstrations de l'algèbre. » *Alkhayyâm* signifie fabricant de tentes. Il n'est guère vraisemblable que le célèbre géomètre ait lui-même exercé cette profession ; mais probablement c'était celle de son père ou d'un de ses ancêtres, et en conséquence, des deux leçons, *Alkhayyâmî* semble être celle qu'il faut préférer.

On ne sait avec précision les dates, ni de la naissance, ni de la mort d'Alkhayyâmî; mais on connaît suffisamment les circonstances de sa vie(**). Il fut élevé en compagnie de deux jeunes gens qui dans la suite devinrent des personnages célèbres. Ce sont *Nizhâm Almoulq,* vizir des sultans Seldjoukides Alp-Arslan et Maliq-Chah, et *Haçan Ibn Sabbah*, fondateur de l'ordre des Assassins.

Les trois amis s'étaient promis que si l'un d'eux se voyait un jour dans une position brillante et élevée, il profiterait de sa prospérité pour y faire participer ses anciens camarades. Arrivé au pouvoir, Nizhâm Almoulq fut fidèle à sa promesse.

Il fit donner à Haçan la place de *hâdjib* ou chambellan. Mais celui-ci, ingrat envers son bienfaiteur, chercha à le remplacer dans la faveur du sultan. C'est pourquoi Nizhâm Almoulq l'éloigna de la cour par des moyens que la perfidie de Haçan excuse peut-être. Plus tard, le vizir encourut, dans un âge déjà avancé, la disgrâce du sultan; et lorsque sa chute l'eut mis à la portée des poignards des fedaïs ismaéliens, Haçan assouvit sa vengeance (***).

Alkhayyâmî, au contraire, refusa presque les offres généreuses du puissant vizir. Il ne demandait qu'une aisance modeste qui lui permît de se livrer tranquillement à ses penchants scientifiques et littéraires. On sait cependant qu'il prit une place distinguée parmi les astronomes de Maliq-

---

*) Ce manuscrit semble avoir fait partie d'un petit recueil de sept traités, dont l'algèbre d'Alkhayyâmî était le premier. On avait donc donné sur la page du titre de celui-ci un catalogue des titres de toutes les pièces qui composaient cette petite collection, comme d'ailleurs cela se fait aussi en cas pareil sur nos livres modernes. L'écriture de ces titres est pour la plupart tellement effacée qu'il est difficile de les déchiffrer.

**) Voir la savante notice consacrée à Alkhayyâmî par M. *Reinaud*, dans les Prolégomènes de sa traduction de la géographie d'Aboulféda, page CI. — *Notices et Extraits*, etc., tome IX, pag. 143 sqq.

***) Voir le Mémoire de M. *Defrémery* sur l'histoire des Seldjoukides et des Ismaéliens. *Journal asiatique*, 1848

Chah, et qu'il était un des principaux auteurs de la réforme du calendrier introduite en 1079 par ordre de ce prince (*).

Alkhayyâmî lui-même nous apprend (p. 13 de la traduction) qu'il avait composé aussi un traité sur l'extraction des racines des ordres supérieurs; et le peu qu'il en dit suffit pour nous révéler ce même esprit généralisateur qui, comme nous allons bientôt le voir, l'avait conduit à une théorie *systématique* des équations cubiques (**).

Alkhayyâmî était poëte (***). Mais ses vers, écrits en persan, lui ont valu une réputation d'athée et de libertin. Rappelons-nous cependant que les mêmes accusations furent portées contre Descartes par un turbulent théologien, le recteur Voët, de l'université d'Utrecht. Ne nous empressons donc pas de souscrire à un jugement qui a peut-être sa source uniquement dans les haines religieuses que les poésies satiriques et spirituelles d'Alkhayyâmî devaient susciter contre lui.

Voici maintenant la traduction de la pièce inédite que j'ai donnée à la fin du texte du traité d'algèbre. Ce morceau est extrait du manuscrit n° 481, supplément arabe, de la Bibliothèque nationale, qui contient un abrégé du Târikh-Alhoqamâ, terminé en 647 de l'hégire, et dont l'auteur s'appelait Alzoûzenî (****).

« Omar Alkhayyam, imâm du Khorâçân, le grand savant du temps, était versé dans les sciences des Grecs. Il exhortait à chercher le Dieu unique, gouverneur du monde, par la purification des mouvements corporels, de manière à rendre l'âme humaine exempte de toute impureté. Il recommandait aussi une étude persévérante de la politique (*****), fondée sur les bases de cette science établies par les philosophes grecs. Les

*) Voir *Abulfedæ* Annales muslemici, éd. de Reyske et Adler, t. III, pag. 236, lig. 18 sqq. (On lit en cet endroit « Ibrahim, » au lieu de « fils d'Ibrahim; » c'est une erreur; comparer la note de M. *Reinaud*, dans les Prolégomènes à la Géogr. d'Aboulf., loc. cit.) — *Joh. Gravii* Epochæ celebriores. Londini, 1650. Pag. 37 sqq. — Muhammedis fil. Ketiri, qui vulgo *Alfraganus* dicitur, Elementa astronomica, opera *Jac. Golii*. Amstelodami, 1669. Notæ, pag. 32 sqq. — *Ismaelis Bullialdi* Astronomia philolaica. Paris, 1645, in-fol. Tabulæ philolaicæ, pag. 210-232, et particulièrement pag. 214 et 223; comparer *Delambre*, Hist. de l'astr. au moyen âge, pag. 191-196. — *Montucla*, Hist. des math., éd. nouv., t. I, pag. 387. — *Delambre*, Hist. de l'astr. moderne, pag. 75-84.

**) La bibliothèque de Leyde (voir n° 1067 du catalogue de 1716) possède aussi un ouvrage d'Alkhayyâmî sur l'explication des difficultés présentées par les définitions placées en tête des livres des Éléments d'Euclide.

***) Voir *J. v. Hammer* Geschichte der schœnen Redekuenste Persiens. Wien, 1818, pag. 80-82.

****) Voir *Wenrich*, de auctorum Græcorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armeniacis, Persicis commentatio. Lipsiæ, 1842, pag. IV-XII, et particulièrement pag. X ult. — Dans les citations que dans le cours de cet opuscule j'aurai à faire de cet abrégé, je le désignerai comme « le Ms. du Târîkh Alhoqamâ de la Bibliothèque nationale. »

*****) Le terme arabe rappelle la dérivation du nom de cette science du mot πόλις. Comparer les Prolégomènes à la géographie d'Aboulféda, par M. *Reinaud*, p. LXIX; on y verra en même temps de quelle manière chez les Arabes la politique se rattachait aux sciences exactes.

Soûfis des temps postérieurs ont accueilli le sens apparent d'une partie de ses poésies, et puis les ont accommodées à leurs doctrines, de sorte qu'ils en font l'objet de discussions dans leurs assemblées et dans leurs réunions privées. Mais le sens caché (*) de ses poésies consiste en axiomes de la religion universelle (**), et en principes généraux embrassant les devoirs pratiques. Comme les hommes de son temps blâmaient ses opinions religieuses, et mettaient à découvert ce qu'il cachait en secret, il craignit pour sa vie, et mit un frein aux écarts de sa langue et de sa plume. Il fit le pèlerinage, grâce plutôt à une rencontre fortuite que par piété; et son extérieur trahit ses pensées secrètes, bien que rien n'en parût dans ses paroles (***). Lorsqu'il fut arrivé à Bagdâd, les personnes qui s'étaient livrées aux mêmes études que lui en fait de sciences anciennes accoururent auprès de lui; mais il leur ferma sa porte, en homme qui avait renoncé à ces études, et non pas en homme qui fût resté leur confrère. Après être retourné de son pèlerinage dans son pays, il se rendait au lieu des prières le soir et le matin, et cachait ses secrets, qui pourtant ne pouvaient pas manquer de se révéler. Il était sans pareil dans l'astronomie et dans la philosophie; et sa capacité éminente dans ces sciences aurait passé en proverbe, s'il avait reçu en partage le respect des convenances. On a de lui des poésies légères dont le sens caché perce à travers leurs expressions voilées, et dans lesquelles la veine de la conception poétique est troublée par l'impureté de l'intention cachée. Poésie :

« Comme mon âme se contente d'une aisance modeste et facile à obtenir, que toute-
« fois ma main et mon bras ne me procurent qu'avec effort,

« Je suis à l'abri de toutes les vicissitudes de la fortune, et, dans mes malheurs, ma
« main et les projets que je forme sont mon refuge.

« Les sphères dans leur mouvement n'ont-elles pas prononcé l'arrêt, que toutes les
« étoiles heureuses finissent par décliner vers une position funeste?

« Persévérance donc, ô mon âme, dans ton repos! Tu en fais seulement crouler le
« sommet, en voulant en consolider les bases. »

Évidemment ces lignes ne sont pas l'œuvre d'une main amie. A les en croire, le caractère d'Alkhayyâmî n'aurait été qu'un mélange d'impureté et d'hypocrisie. Mais tout ce qu'elles s'efforcent de jeter d'ombre sur la moralité de notre auteur ne sert qu'à faire ressortir d'une manière plus brillante l'hommage qu'elles ne peuvent refuser au mérite du savant. C'est un homme détestable, mais c'est un astronome sans pareil; c'est peut-être un hérétique; mais, à coup sûr, c'est un philosophe du premier ordre.

Trois cents ans plus tard, les passions avaient eu le temps de se calmer. La connaissance ou du moins le bruit des découvertes d'Alkhayyâmî s'était répandu jusqu'en Espagne, et Ibn Khaldoûn y put faire allusion dans ses Prolégomènes(****). Alors ce n'est plus ni l'hypocrite ni le libertin Alkhayyâmî; c'est simplement « un des plus grands géomètres de l'Orient. »

---

*) C'étaient de semblables « sens cachés » que les Ismaéliens croyaient découvrir dans les livres sacrés de l'islamisme, qui leur firent donner le nom de *Bâtiniens*.

**) Il aurait été plus naturel de dire : للشريعة واسع; alors le sens : « en axiomes renfermant les dogmes religieux, et en maximes qui comprenaient les devoirs pratiques, » répondrait mieux au parallélisme de la phrase.

***) Peut-être faut-il lire من الاسرار au lieu de من السرار, et traduire : « il laissa échapper des secrets qui n'étaient pas très-purs, pas conformes à l'honnêteté. »

****) Le passage dont je veux parler fait partie du chapitre que j'ai indiqué dans la note

Trois autres siècles passèrent sans diminuer l'estime dont jouissaient ses travaux. Hadji-Khalfa nous en offre le témoignage en citant une partie considérable du commencement de l'algèbre d'Alkhayyâmî(*), tandis qu'ordinairement il se contente de donner le titre ou tout au plus les premiers mots des ouvrages dont son immense bibliographie contient la nomenclature.

La réputation d'Alkhayyâmî ne brillait que d'un plus vif éclat au milieu des ténèbres où le temps avait plongé tant de célébrités secondaires.

Examinons donc l'ouvrage qui, sans aucun doute, a puissamment contribué à immortaliser ainsi le nom de son auteur, et dont les feuilles suivantes présentent le texte et la traduction.

Il se divise naturellement en cinq parties, de la manière suivante: 1° l'introduction, comprenant une préface, les définitions des notions fondamentales de l'algèbre, et un tableau des équations que l'auteur se propose de discuter (p. 1-12 de la traduction); 2° la résolution des équations des deux premiers degrés (p. 12-28); 3° la construction des équations cubiques (p. 28-68); 4° la discussion des équations à termes fractionnaires, ayant pour dénominateurs des puissances de l'inconnue (p. 69-81); 5° remarques additionnelles (p. 81-88).

Il est une particularité de cette algèbre qui mérite d'être remarquée et discutée dès l'abord. C'est que l'auteur se fait une loi, pour toutes les équations dont il s'occupe, de joindre la résolution numérique ou arithmétique (**) à la construction géométrique, et *vice versâ*. Il est vrai que, pour les équations cubiques, il est forcé de se borner à cette dernière; mais aussi il constate exprès, et signale aux algébristes à venir, cette lacune à combler (p. 9.). Afin de comprendre pourquoi l'algébriste arabe se croyait si strictement obligé de compléter, l'une par l'autre, l'arithmétique et la géométrie, il faut expliquer ce qu'il entend par « *résolution numérique.* »

Là où il parle d'une manière plus explicite, il se sert de l'expression: « *résolution, lorsque l'objet du problème est un nombre.* » « L'objet » du problème, c'est l'inconnue (voir la définition p. 5); la *résolution numérique*, dans l'acception de l'algébriste arabe, sera donc une résolution qui suppose que l'inconnue soit un *nombre.*

Or, les Arabes, fidèles aux traditions reçues des Grecs, désignent par « nombre » (عدد) ou « nombre absolu » (عدد مطلق), le *nombre entier*, un nombre d'unités. Ils vont même plus loin, et se servent de ce terme comme d'un équivalent de l'unité. C'est ainsi qu'on trouve des expressions comme « trente en nombre » (ثلاثون من العدد), ce qui, selon les règles de la grammaire arabe (***), équivaut, à une légère nuance près, à dire « trente

au bas de la page 6. Il est reproduit par *Rosen* dans son éd. de l'algèbre de Mohammed Ben Moûçâ, page 191.

*) Éd. de Fluegel, t. II, p. 584.

**) On verra bientôt par quelles raisons j'évite de dire « algébrique. »

***) *De Sacy*, Gr. ar., 2e éd., t. I, § 538 et § 565.

nombres; » enfin, ce pluriel « nombres » lui-même est employé dans les énoncés des équations n° 18 à 25 (*), pour désigner le terme connu de l'équation cubique.

Il résulte donc que le géomètre arabe, en parlant de la *résolution numérique* d'une équation, entend qu'il s'agit de satisfaire à cette équation par un nombre entier. Et ce qui détruira les derniers doutes qui pourraient subsister à cet égard, ce sont les conditions qu'il énonce pour la solubilité arithmétique des équations du second degré (p. 17). Ces conditions dépassent même le but qu'elles doivent atteindre, ainsi que je l'ai fait observer à l'endroit indiqué. Mais il est facile de remonter à la source de cette erreur.

Les mêmes conditions, ou du moins la plus essentielle des deux, à savoir la seconde, se trouvent nombre de fois chez *Diophante*, et il est impossible de méconnaître ici l'influence de cet auteur. Il y a seulement cette différence que chez Diophante cette condition est justifiée par la nature des problèmes qu'il se propose, tandis que chez Alkhayyâmî, elle établit des limites trop étroites. Je ne citerai, à l'appui de ce que je viens d'avancer, qu'un seul problème de Diophante, entre beaucoup qui me fourniraient les mêmes preuves.

Dans le 6e problème du VIe livre, Diophante se propose de trouver un triangle rectangle en nombres rationnels, de manière que la surface du triangle, plus une des cathètes, soit égale à un nombre donné. Désignant les deux cathètes par ax et bx respectivement, le nombre donné par k, et posant $\frac{ab}{2} = c$, on aura

$$1) \quad cx^2 + ax = k,$$

donc

$$2) \quad cx = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ck}.$$

Arrivé là, Diophante énonce sa condition de la manière suivante : καὶ δεῖ τῶν ἀριθμῶν τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτό προσθεῖναι τὰς δυνάμεις ἑπτάκις (**) γενομένας καὶ ποιεῖν τετράγωνον. C'est-à-dire qu'il faut qu'on ait

$$3) \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ck = y^2;$$

en posant $a = 1$, l'équation (2) se transforme dans : $bx = -1 + \sqrt{1 + 2bk}$, et il s'agit de satisfaire simultanément aux deux équations indéterminées

$$1 + 2kz = y^2, \qquad 1 + z^2 = t^2.$$

On voit aisément que la condition (3) est véritablement nécessaire, puis-

---

*) Voir pages 44, 46, 47, 49, 57, 62, 65.

**) Diophante avait pris $k = 7$.

qu'il s'agit de rendre rationnels les côtés du triangle, c'est-à-dire que dans l'équation (1), non-seulement l'*inconnue*, mais aussi les *coefficients* sont assujettis à certaines conditions.

Il se présente ici la question suivante : Si, pour la résolution numérique, l'algébriste arabe exige qu'on satisfasse à l'équation proposée par un nombre entier, il fait donc de l'algèbre indéterminée?

Il nous manque un élément pour répondre à cette question d'une manière décisive. C'est que l'auteur ne se prononce pas sur la nature des coefficients de l'équation proposée. D'après les termes dont il se sert, on peut croire qu'il considère le terme connu (العدد المفروض) comme un nombre entier donné; mais le coefficient de l'inconnue (عدة الاجذار ou simplement (*) الاجذار) est laissé entièrement indéterminé. En supposant que ce coefficient doive également être un nombre entier, il s'agit en effet, pour obtenir les conditions de la solubilité « numérique » de l'équation du second degré, de discuter l'équation indéterminée $x^2 + yx = a$. Si, au contraire, on laisse aux constantes de l'équation déterminée proposée toute leur généralité, la détermination des conditions nécessaires pour satisfaire à la proposée par un nombre entier dépend d'un problème plus général.

Ce qu'il y a de certain, c'est que la résolution numérique de l'algébriste arabe comprend : 1° ce qu'aujourd'hui on désigne par la résolution algébrique d'une équation; 2° la détermination des conditions nécessaires pour que la fonction des coefficients, qui est égale à l'inconnue, devienne un nombre entier. Alors si les coefficients de l'équation proposée satisfont à ces conditions, la résolution numérique, selon notre auteur, est possible; dans le cas contraire, elle est impossible.

Vu cette « impossibilité, » la construction géométrique sert, chez l'algébriste arabe, non-seulement d'éclaircissement et d'explication, mais de complément nécessaire à la résolution numérique; et on comprend pour quelles raisons il dit, dès l'abord, que l'objet de l'algèbre est formé autant par le nombre absolu que par les quantités géométriques.

On reconnaît dans cette séparation, portée même trop loin, de la quantité discontinue d'avec la quantité continue, ou, si l'on veut, de la quantité rationnelle d'avec la quantité irrationnelle; on y reconnaît, dis-je, les

---

*) On pourrait être tenté de trouver ici une autre trace de l'influence de Diophante, puisque celui-ci dit δυνάμεις pour désigner le *coefficient* du carré de l'inconnue, de même que l'algébriste arabe désigne par الاجذار, le *coefficient* de l'inconnue. Mais cette suppression du terme « coefficient » se trouve aussi chez Moh. Ben Moûçâ, et il n'existe aucune donnée historique qui prouve qu'aux temps de cet algébriste Diophante ait été déjà connu aux Arabes. Il faut donc chercher ailleurs l'explication de cette coïncidence, à moins qu'on ne veuille la considérer comme accidentelle, et n'ayant rien de très-surprenant en elle-même. — D'un autre côté, on pourrait trouver que le mot عدة a l'air d'une traduction du terme πλῆθος, qui se trouve chez Diophante.

conséquences de la distinction fondamentale établie entre le ποσὸν διωρισμένον et le ποσὸν συνεχές par Aristote, dont le système a si puissamment influé sur le développement et sur le génie de la science arabe.

Les résolutions qu'Alkhayyâmî donne des équations du second degré, et qui ont présenté les données principales pour la discussion précédente, vont me fournir encore le sujet de quelques autres observations.

On remarquera d'abord combien les démonstrations de ces résolutions sont plus élégantes et plus scientifiques que celles de Mohammed Ben Moûçâ, combien toute la discussion est prise de plus haut et maniée avec supériorité. Pour faire ressortir cette différence, j'ai placé en note, au-dessous des démonstrations d'Alkhayyâmî, celles de Mohammed Ben Moûçâ. Seulement, j'ai traduit celles-ci en langage algébrique, afin qu'on puisse saisir immédiatement la marche suivie dans ces démonstrations, et plus ou moins déguisée dans leur rédaction originale. On remarquera aussi que la démonstration donnée par Mohammed Ben Moûçâ, pour l'équation n° 8, est incomplète en ce qu'elle ne s'applique qu'à un seul des deux cas de la résolution.

Je saisis cette occasion pour m'excuser auprès de ceux de mes lecteurs qui pourraient trouver que les notes dont j'ai accompagné ma traduction sont trop chargées de détails élémentaires. Pour me justifier, je n'aurai qu'à expliquer quel était mon but dans la rédaction de ces notes. Je voulais reproduire fidèlement, avec tous leurs détails, les procédés de mon auteur, et cependant les traduire dans le langage des mathématiques modernes, pour épargner aux géomètres qui parcourraient cet opuscule l'ennui que leur causerait sans doute la lecture de ces longues résolutions et démonstrations parlées de l'algébriste arabe. Dans la partie de son traité qui contient la discussion des équations cubiques, ces courts aperçus contribueront peut-être à rendre apparents, même à ceux qui ne voudraient y jeter qu'un coup d'œil fugitif, le parallélisme et l'ensemble des constructions d'Alkhayyâmî. Mais, sous peine d'être accusé d'inconséquence, je ne pouvais supprimer pour une partie de l'ouvrage arabe ce que je donnais pour une autre. J'étais tenu de rendre compte de l'esprit des méthodes arabes, de les anatomiser aussi scrupuleusement que possible. Lorsque ces méthodes étaient élémentaires, ces explications entraînaient nécessairement des considérations élémentaires.

Mais revenons encore aux équations du second degré, et à la manière dont Alkhayyâmî les construit au moyen des propositions connues des Données et du deuxième et du sixième livre des Éléments d'Euclide. Cette construction répond d'une manière remarquable à la supposition de Cossali (*), qui pensait que la transformation de ces propositions de géo-

*) Origine dell' algebra, t. I, p. 87-91.

métrie en théorèmes algébriques pouvait avoir eu lieu dans l'intervalle de temps qui sépare Euclide de Diophante. Seulement, cette transformation, au lieu d'avoir été la source de l'algèbre, ne se serait opérée qu'à une époque où cette science était déjà considérablement développée. Il se pourrait cependant que Cossali ne se fût pas entièrement trompé, et qu'Alkhayyâmî n'eût pas l'honneur d'avoir le premier aperçu les relations qui existent entre les propositions mentionnées et la construction des équations du second degré.

En effet, dans le Qitâb Alfihrist, un article relatif à Hipparque est conçu de la manière suivante (*) :

« Hipparque le rafanien **). On a de lui, en fait d'ouvrages : le Traité d'algèbre, connu aussi sous le nom des Définitions. Cet ouvrage fut traduit et revu par Aboûl Wafâ Mohammed Ben Mohammed le calculateur, qui est aussi auteur d'un commentaire du même ouvrage, accompagné de démonstrations fondées sur des raisonnements géométriques. (Puis on a d'Hipparque un) Traité sur la division des nombres. »

Plus loin on lit, dans la même bibliographie, à l'article Aboûl Wafâ, parmi les ouvrages de ce géomètre énumérés très-complétement : « Commentaire de l'ouvrage d'Hipparque sur l'algèbre (***). »

Le témoignage de ces passages, qui attribuent à Hipparque des travaux en dehors de ceux qui l'ont illustré comme astronome, est corroboré par les mots suivants de Plutarque (****) : Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλέγχουσιν οἱ ἀριθμητικοί, ὧν καὶ Ἵππαρχός ἐστιν.

Je me borne à signaler ces faits, sans vouloir en aucune manière décider si les constructions des équations du second degré qu'on trouve dans l'algèbre d'Alkhayyâmî appartiennent véritablement à celui-ci, ou si elles sont empruntées soit à Aboûl Wafâ, soit à Hipparque.

Mais je me hâte d'arriver à ce qui occupe la partie la plus considérable du traité d'Alkhayyâmî, et à ce qui en constitue le mérite principal : à la construction des équations du troisième degré.

---

*) Voici le texte original de cet article d'après le Ms. de la Bibl. nationale, et revu sur le Ms. de la bibl. de Leyde : ابرخس الرَّفَنى ، وله من الكتب ، كتاب صناعة الجبر ويعرف بالحدود نقل هذا الكتاب واصلحه ابو الوفا محمد بن محمد الحاسب وله ايضا شرحه وعلله بالبراهين الهندسيّة ، كتاب قسمة الاعداد *

**) Le *Loubb Alloubâb* explique ainsi ce nom (éd. de Veth., t. I, p. ||٧.) الرفنى بفتحتين ونون الى رَفِينة [رفية] بلد بأطْرابلس الشام. — L'origine syrienne qu'on attribue ici à Hipparque serait en contradiction avec la tradition reçue, suivant laquelle Hipparque était originaire de Nicée en Bithynie.

***) كتاب تفسير كتاب ابرخس فى الجبر.

****) Opp. omnia. Paris, 1624, fol., t. III, p. 1047; cf. p. 732.

On dit quelquefois, et on pense assez généralement, que les Grecs ont construit des équations du troisième degré; mais cette opinion renferme, sinon une erreur, du moins une inexactitude. Il est vrai que les géomètres grecs ont résolu certains problèmes géométriques qui, ramenés à leur expression algébrique, conduisent à une équation du troisième degré. Mais on conviendra sans doute qu'il est très différent de résoudre géométriquement un semblable problème, ou de reconnaître que ce problème dépend d'une équation cubique; de traiter, entre autres problèmes de géométrie, quelques-uns du troisième degré, ou d'énumérer systématiquement les formes des équations cubiques, de les construire une à une, et de discuter les cas particuliers que présentent ces solutions; tout cela avec le but clairement prononcé (*) de donner implicitement, au moyen de ces théorèmes généraux, la résolution de tel problème spécial qu'on voudra se proposer. C'est ce qui n'a été fait nulle part par les géomètres grecs, mais c'est ce qu'on trouve chez les Arabes, et notamment dans l'algèbre d'Alkhayyâmî.

En effet, pour construire les équations cubiques, les géomètres grecs auraient, avant tout, dû les connaître. Or, comme on ne trouve, dans aucun des ouvrages géométriques des Grecs, nulle trace d'algèbre, il est impossible de dire que les Grecs aient construit des équations du troisième degré.

Ce sont les Arabes qui ont le mérite d'avoir, les premiers, essayé d'appliquer l'algèbre à la géométrie, et *vice versâ;* d'avoir jeté les fondements de cette liaison du calcul avec la géométrie, qui, dans la suite, a éminemment contribué au développement des mathématiques (**).

Notre auteur prend même à tâche de montrer (***) comment ce progrès se fit chez les Arabes, et comment d'abord c'était Almâhânî qui, en partant d'un problème posé par les anciens, essaya de le résoudre en le ramenant à son expression algébrique. Ce premier essai ne fut pas couronné de succès; mais bientôt d'autres géomètres furent plus heureux, et les constructions qu'ils donnèrent de plusieurs équations cubiques, auxquelles ils furent conduits par des problèmes qui n'étaient encore que particuliers, firent naître chez Alkhayyâmî la conception d'une théorie systématique des équations du troisième degré.

Disons quelques mots du problème qui servit de point de départ à des découvertes aussi intéressantes. Dans la cinquième proposition du second livre du Traité de la sphère et du cylindre, Archimède se propose le pro-

---

*) Voir pag. 83, lig. 18.

**) Par rapport à cette connexion intime que les géomètres arabes cherchaient à établir entre les parties arithmétiques et les parties géométriques, des mathématiques on ne comparera peut-être pas sans intérêt le catalogue des ouvrages mathématiques d'Ibn Alhaïtham, donné par cet auteur même, dans le passage que j'ai extrait d'Ibn Abî Oçaïbiah; voir pag. 73.

***) Voir pag. 2 et 3, et comparer Addition B, pag. 96. Voir aussi pag. 43, 54 et 81 ult. sqq.

blème de couper une sphère par un plan, de manière que le rapport de l'un des deux segments à l'autre soit égal à un rapport donné (*). Il démontre que ce problème dépend de la construction suivante : Étant donnés une ligne DZ et sur cette ligne deux points B, T, de telle sorte que B soit situé entre D et T, déterminer un point X de la ligne DZ, tel qu'on ait $XZ : ZT = \overline{BD}^2 : \overline{DX}^2$. Ramenons ce problème à son expression algébrique en désignant BD, ZT, ZD, DX, par a, b, c, x, respectivement; il s'agira de déterminer x au moyen de la proportion $(c - x) : b = a^2 : x^2$, c'est-à-dire de construire l'équation cubique $x^3 + a^2 . b = cx^2$.

Il paraît que ce lemme fixa d'une manière toute particulière l'attention des géomètres arabes. Comme Archimède n'en avait pas donné la solution, c'est peut-être qu'ils mettaient un certain point d'honneur à prouver qu'ils savaient surmonter aisément un obstacle qui semblait avoir arrêté Archimède (**). J'ai réuni, dans les additions A et B, différentes solutions de ce lemme, données par des géomètres arabes (***).

Quant à la manière dont Alkhayyâmî construit les équations cubiques, je vais donner une indication rapide des traits généraux de sa méthode, sans entrer dans les détails dont on se rendra facilement compte en parcourant les notes qui accompagnent ma traduction. Dans ces notes j'ai fidèlement reproduit les procédés du géomètre arabe, tout en m'ef-

---

*) Édition d'Oxford, p. 157 sqq.

**) Il est vrai que, d'après Eutocius, Archimède lui-même aurait donné une solution de ce problème qui revient à construire le lemme par la combinaison de la parabole $x^2 = y\frac{a^2}{c}$, avec l'hyperbole équilatère $y(c-x) = b.c$. Il ne faut pas croire, cependant, que le commentaire d'Eutocius sur le Traité de la sphère et du cylindre n'ait pas été connu de bonne heure aux Arabes. On peut comparer à ce sujet un passage que j'ai extrait d'un manuscrit de la Bibliothèque nationale, pag. 103 ult. On trouve même dans un autre manuscrit de la Bibliothèque nationale (n° 952, 2, Supplément arabe), écrit à Chîrâz l'an 358 de l'hégire (comp. page 117, première note), un fragment intitulé de la manière suivante : « Traité d'Eutocius (أوطوقيس), rendant compte des solutions, données par les anciens, du problème de la détermination de deux lignes entre deux autres lignes, de telle sorte que ces quatre lignes soient en proportion continue. Traduit par Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah. Cet ouvrage contient dix-huit figures et (les solutions de) onze géomètres, à savoir : Héron (ايرن), Philon le Byzantin (فيلن البزنطى), Apollonius (ابلونيوس), Dioclès (ديوقليس), Pappus (بابوس), Sporus (سودانوس *sic*), Ménechme (مانخمس), Ératosthène (ارطستانس), Platon (افلاطن), Architas (ارخوطس), Nicomède (نوميدرس *sic*). » C'est une traduction du commentaire de la 3e proposition du Traité de la sphère et du cylindre.

***) Les géomètres arabes désignent généralement ce problème comme celui posé dans la *quatrième* proposition du Traité de la sphère et du cylindre. C'est que le terme arabe, traduit par « proposition, » signifie à la lettre « figure, » et que, à compter d'après les figures, celle de la 5e proposition n'est en effet que la 4e du second livre, puisque la 1re proposition de ce livre est sans figure.

forçant d'ôter à ceux-ci ce qu'ils avaient quelquefois de traînant et d'entortillé.

Alkhayyâmî commence toujours par rendre homogène l'équation proposée. On remarquera que c'est pour ce but qu'il a mis en tête de la partie de son mémoire qui contient la construction des équations cubiques, deux théorèmes auxiliaires. En général, on aura souvent occasion d'admirer l'esprit d'ordre, le génie systématique, qui distinguent notre auteur. Outre ces deux lemmes, c'est encore la construction de l'équation $x^3 = a$ qui sert pour ces transformations relatives à l'homogénéité, lorsqu'il s'agit de substituer un cube au terme connu de l'équation.

Ensuite Alkhayyâmî détermine, au moyen des coefficients transformés de l'équation, deux coniques, et arrive, par l'intersection de celles-ci, à une égalité de deux solides. Soit en décomposant ceux-ci, soit en ajoutant ou en retranchant de part et d'autre des solides communs, il obtient enfin l'équation proposée.

Ramenons maintenant à son expression générale la méthode suivie par Alkhayyâmî pour déterminer les deux coniques au moyen des constantes de l'équation proposée. En formant les équations analytiques des coniques qu'il emploie, puis en comparant entre elles ces équations, et en désignant par $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, φ des quantités qui ne peuvent prendre que les valeurs $+1$ ou -1 (ce qui permettra de poser $\varkappa.\lambda = \frac{\varkappa}{\lambda}$, $\varkappa^2 = 1$, etc.), on trouve que le procédé du géomètre arabe se réduit aux trois systèmes suivants :

I. $y^2 + \varkappa x^2 + \lambda \frac{a}{b} x = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \varkappa = 0 \ \ldots \text{ parabole.} \\ \varkappa = +1 \ \ldots \text{ cercle.} \\ \varkappa = -1 \ \ldots \text{ hyperbole.} \end{array} \right.$

$x^2 - \sqrt{b}.y = 0$ . . parabole.

$x^4 + \varkappa b x^2 + \lambda a x = 0$ ou $x^3 + \varkappa b x + \lambda a = 0.$

II. $yx - \sqrt{a.m} = 0$ ... hyperbole.

$y^2 + \varkappa m x + \lambda m c = 0$ ... parabole.

$\varkappa x^3 + \lambda c x^2 + a = 0$ ou $x^3 + \varkappa\lambda c x^2 + \varkappa a = 0.$

III. $y^2 + \varkappa x^2 + \lambda \left\{ \frac{a}{b} + \mu c \right\} x + \nu \frac{ac}{b} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \varkappa = +1 \ldots \text{ cercle.} \\ \varkappa = -1 \ldots \text{ hyperbole.} \end{array} \right.$

$yx + \xi \sqrt{b} \,.\, x + \varphi \frac{a}{\sqrt{b}} = 0$ ... hyperbole.

$$\varkappa x^4 + \lambda \left\{ \frac{a}{b} + \mu c \right\} x^3 + \left\{ b + \nu \frac{ac}{b} \right\} x^2 + 2\xi\varphi a x + \frac{a^2}{b} = 0,$$

ou $$x^4 + \varkappa\lambda \left\{ \frac{a}{b} + \mu c \right\} x^3 + \varkappa \left\{ b + \nu \frac{ac}{b} \right\} x^2 + 2\varkappa\xi\varphi a x + \varkappa \frac{a^2}{b} = 0.$$

Le système I sert à la construction des équations 3, 13, 14, 15, lorsqu'on pose

3. $\varkappa = 0 \quad \lambda = -1 \quad b = 1$ 14. $\varkappa = -1 \quad \lambda = +1$

13. $\varkappa = +1 \quad \lambda = -1$ 15. $\varkappa = -1 \quad \lambda = -1$

Le système II est employé pour les équations 16 à 18, lorsqu'on fait

16. $m = \sqrt[3]{a}$ $\quad x = -1 \quad \lambda = -1$

17. $m = \sqrt[3]{a}$ $\quad x = +1 \quad \lambda = -1$

18. $m = c$ $\quad x = -1 \quad \lambda = +1.$

Enfin le système III correspond aux équations 19 à 25, lorsqu'aux quantités x, λ, μ, ν, ξ, φ on donne les valeurs suivantes :

	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.
x	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1
λ	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1
μ	−1	−1	−1	−1	+1	+1	+1
ν	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
ξ	+1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
φ	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1

En divisant l'équation du quatrième degré qui résulte du système III par $\left(x \pm \frac{a}{b}\right)$, on la ramène à l'équation cubique proposée

$$x^3 + \rho c x^2 + \sigma b x + \tau a = 0,$$

puisque $$\left\{x^3 + \rho c x^2 + \sigma b x + \tau a\right\} \cdot \left\{x + \frac{\tau}{\sigma} \cdot \frac{a}{b}\right\} =$$

$$= x^4 + \left\{\rho c + \frac{\tau}{\sigma} \cdot \frac{a}{b}\right\} x^3 + \left\{\sigma b + \frac{\rho\tau}{\sigma} \cdot \frac{ac}{b}\right\} x^2 + 2\tau a x + \frac{\tau^2}{\sigma} \cdot \frac{a^2}{b} =$$

$$= x^4 + \left\{\sigma\tau \frac{a}{b} + \rho c\right\} x^3 + \sigma\left\{b + \rho\tau \frac{ac}{b}\right\} x^2 + 2\tau a x + \sigma \frac{a^2}{b},$$

où les valeurs à donner aux quantités ρ, σ, τ sont les suivantes :

	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.
ρ	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1
σ	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1
τ	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1

Alkhayyâmî n'a pas remarqué que, dans l'équation générale du troisième degré, on peut toujours faire disparaître le second terme, ce qui lui aurait épargné l'emploi des systèmes II et III (*).

Après avoir esquissé cet exposé général des constructions d'Alkhayyâmî, examinons encore quelques détails de sa méthode.

Observons d'abord qu'Alkhayyâmî, pas plus que Mohammed Ben Moûçâ, ne tient aucun compte des racines négatives, ni, à plus forte raison, des racines imaginaires; dès qu'un problème n'admet pas des racines réelles et positives, il le déclare « impossible. » Aussi ne trouve-t-on pas dans le tableau des équations d'Alkhayyâmî, complet à cela près, ces formes, où la somme de tous les termes, formant le premier membre, est égalée à

*) Dans une notice sur l'algèbre d'Alkhayyâmî, insérée au tome XL du Journal de M. *Crelle*, j'ai montré (au § 3 de cette notice) comment on est très-naturellement conduit à ces trois systèmes du géomètre arabe, en partant des principes analytiques de la construction des équations du troisième degré.

zéro (*). Les algébristes arabes, qui considèrent tous les éléments d'une équation, et notamment aussi l'inconnue, comme des quantités positives, ne pouvaient pas avoir l'idée de ces formes.

Toutefois, il est très-surprenant qu'Alkhayyâmî, en construisant les équations du troisième degré, n'ait pas remarqué l'existence des racines négatives. Rien, en effet, n'est plus propre à montrer celles-ci pour ainsi dire d'une manière palpable, et en même temps à donner des idées justes et nettes sur leur nature, que la construction des équations. C'est la vicieuse habitude de ne tracer que des demi-cercles, des demi-paraboles, et une seule branche des hyperboles, qui a fait manquer au géomètre arabe cette belle découverte.

Ce défaut de ses constructions a même une fois empêché notre auteur de voir qu'une équation a deux racines positives, dont il ne construit qu'une seule (voir la note p. 68). Il tombe dans une autre erreur semblable, mais plus regrettable encore, parce qu'elle touche à quelques considérations fondamentales sur la nature des équations cubiques. C'est qu'Alkhayyâmî, en construisant l'équation $x^3 + bx = cx^2 + a$, ne trouve qu'une seule racine positive, tandis qu'elle en admet trois (voir la note p. 65) (**).

Les Arabes savaient déjà qu'il existait une certaine équation du second degré à deux racines (***); si donc Alkhayyâmî avait remarqué que pareillement une équation cubique admettait, en certains cas, trois solutions, il est difficile à croire que cette coïncidence entre le degré du problème et le nombre des solutions ne l'eût pas frappé et conduit à des réflexions, et peut-être à des découvertes, ultérieures.

A l'exception des deux erreurs dont je viens de parler, Alkhayyâmî discute avec une justesse parfaite le nombre des racines positives, ou, si l'on veut, le nombre des intersections des deux coniques qui construisent l'équation, du côté des coordonnées positives. Il ne trouve donc qu'une seule solution pour les équations 3, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 24, dont le terme connu est affecté du signe négatif. Il en trouve deux pour les équations 14, 17, 20, 21, 25 (****), dont le terme connu est affecté du signe positif, mais dont les deux racines conjuguées sont ou imaginaires ou *posi-*

---

*) $x+a=0$, $x^2+a=0$, $x^2+bx+a=0$, $x^3+a=0$, $x^3+bx+a=0$, $x^3+cx^2+a=0$, $x^3+cx^2+bx+a=0$. — Ces formes sont également négligées par *Cardan*, par *Viète*, et même par *Harriot*, bien que celui-ci fût auteur de l'usage d'écrire les équations en forme d'une somme algébrique égalée à zéro. *Descartes* est le premier qui discute ces formes. Voir les œuvres de Descartes publiées par V. Cousin, tom. V, p. 386 à 428, et particulièrement pages 389, 399, 404, 405.

**) Ici l'erreur provient de ce que l'auteur n'a pas bien discuté les intersections du cercle et de l'hyperbole fig. 28, 1; car les deux courbes peuvent avoir deux rencontres de plus sur les parties de leurs circonférences comprises entre A et K.

***) Diophante ne parle encore que d'une seule racine en ce cas.

****) Abstraction faite de l'erreur commise dans la construction de cette dernière équation.

tives. Pour ces dernières équations, lorsqu'elles n'admettent pas des racines positives, il les déclare « impossibles, » et il établit parfaitement le critérium géométrique de la réalité des deux racines conjuguées, à savoir la rencontre en deux points, ou le contact des deux coniques qui construisent l'équation. Au cas du contact, il n'admet naturellement qu'une seule racine, et ne distingue pas deux racines égales.

Pour compléter sa théorie, Alkhayyâmî aurait dû établir encore des relations entre les coefficients de l'équation proposée, correspondant à cette limite qui est géométriquement représentée par le contact des deux coniques.

C'est ce qu'il ne fait réellement pas. Mais, approchant de ce but, il distingue quelquefois certains cas, et énonce en même temps que dans l'un ou dans l'autre de ces cas le problème est, ou n'est pas, ou possible, ou impossible. En ramenant les relations, établies de cette manière, à leur expression algébrique, on trouve par exemple qu'il montre pour l'équation 17 : que tant que $\sqrt[3]{a} \leqq \frac{c}{2}$, il existe nécessairement deux racines positives; que lorsque $c > \sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$, elles peuvent exister ou non; et que lorsque $\sqrt[3]{a} \geqq c$, elles ne peuvent pas exister du tout. Pour l'équation 21 : que lorsque $a^{\frac{3}{2}} + b^2\sqrt{c} < \sqrt{a}\,.\,bc$, deux racines positives existent nécessairement, tandis que lorsque $a^{\frac{3}{2}} + b^2\sqrt{c} > \sqrt{a}\,.\,bc$, elles peuvent exister ou non. Pour l'équation 24 : que lorsque $\frac{a}{b} \geqq c$, elles n'existent pas (*). Pour l'équation 25 : que lorsque $\frac{a}{b} > c$, elles peuvent exister ou non; mais que lorsque $\frac{a}{b} \leqq c$, elles existent nécessairement (**).

D'autres géomètres arabes réussirent mieux dans la détermination de cette limite, qui fut tentée seulement par Alkhayyâmi. C'est sous ce rapport qu'on ne remarquera peut-être pas sans intérêt les morceaux dont j'ai rendu compte dans les additions B et C. J'y ai montré comment un théorème démontré par Eutocius contenait le germe de ces découvertes, et comment, en partant de la simple considération que l'expression

*) Parce qu'alors la construction donne seulement la troisième racine positive; mais malheureusement aussi dans le cas $\frac{a}{b} < c$, l'auteur (comme je l'ai fait observer ci-dessus) ne découvre que cette troisième racine.

**) En conséquence de l'autre erreur mentionnée ci-dessus, l'auteur ne trouve ici, en vérité, qu'une seule de ces deux racines positives.

$(a - x)\, x^2$ devient un maximum pour $x = \frac{2}{3} a$, les géomètres arabes sont parvenus à exprimer, avec justesse et élégance, les limites de la solubilité dans des problèmes du troisième degré. On trouvera notamment, dans l'addition B, l'énoncé parfait de la relation $4c^3 = 27a$, qui correspond à cette limite pour l'équation $x^3 - cx^2 + a = 0$.

Quant aux équations du quatrième degré, Alkhayyâmî déclare qu'il est impossible de les construire au moyen des méthodes qu'il a développées (voir p. 79). Cependant on reconnaîtra, en parcourant l'addition D, que les Arabes ont non-seulement construit des problèmes du quatrième degré (1er problème de cette addition), mais encore qu'ils ont ramené des problèmes de ce degré à leur expression algébrique (2e problème de la même addition); de sorte qu'on peut dire, en toute rigueur, qu'ils ont construit des équations du quatrième degré au moyen de l'intersection de deux coniques.

Enfin, on trouve qu'un célèbre géomètre arabe (voir p. 73) a construit l'équation binôme du cinquième degré. On peut croire qu'il y employa, soit une des courbes supérieures dont les Arabes ont pu puiser la connaissance dans les ouvrages des géomètres grecs, soit un de ces procédés mécaniques dont ces ouvrages offrent également des exemples.

Dans la dernière partie de son traité, Alkhayyâmi propose même encore l'équation binôme du sixième degré (dont la résolution, en effet, est très-facile). En général, cette partie de son algèbre doit intéresser surtout au point de vue historique, et comme montrant cet esprit de système dont le travail tout entier d'Alkhayyâmî porte le cachet.

Je veux parler de la discussion des équations à termes fractionnaires, dont les dénominateurs sont des puissances de l'inconnue. L'auteur ramène ces équations à ses vingt-cinq équations primitives : les unes, en substituant à l'inconnue une nouvelle inconnue qui est la valeur réciproque de la première; les autres, en multipliant l'équation proposée par une puissance de l'inconnue.

Pour compléter un ensemble de données concernant les travaux des Arabes sur les problèmes qui dépendent de l'intersection de deux coniques, j'ai ajouté (*), aux morceaux dont je viens de rendre compte, l'extrait d'un traité arabe de la trisection de l'angle. On sait que les deux problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle sont étroitement liés l'un à l'autre, et que, depuis Platon jusqu'à Viète, ils n'ont pas cessé d'exercer le génie des géomètres. J'ai essayé de montrer, dans les morceaux précédents, les développements importants qu'avait reçus, chez les Arabes, le premier de ces deux problèmes. J'espère

---

*) Voir addition E.

donc qu'on accordera peut-être aussi quelque intérêt aux solutions qu'ils ont données du second.

Je l'espère d'autant plus, que ce petit traité réunit, d'une manière singulière, plusieurs noms des plus célèbres qui ont illustré l'astronomie et les mathématiques orientales, tels que ceux d'Alqoûhî, d'Albîroûnî, de Thâbit Ben Korrah. Pour ne pas trop dépasser les limites prescrites à la publication présente, et pour rendre compte, en moins de dix pages, de ce qui en occupe trente-six dans le manuscrit arabe, j'ai été obligé de supprimer, dans cet extrait, tout ce qui n'était pas essentiel, tout ce à quoi le lecteur peut facilement suppléer lui-même.

On verra encore, dans les deux dernières sections de l'addition E, que les Arabes ont ramené la construction de l'ennéagone inscrit au cercle à une équation cubique ; et qu'ils ont construit le côté de l'heptagone inscrit au cercle au moyen de l'intersection de deux coniques.

En comparant entre eux les traités de Mohammed Ben Moûçâ et de Behâ Eddîn, Colebrooke était arrivé à la conclusion (Algebra of the Hindus. Dissertation, p. LXXIX), que l'algèbre était restée à peu près stationnaire entre les mains des musulmans. Ne serait-on pas également fondé à mettre en doute les découvertes d'Apollonius, d'Archimède, de Diophante, parce que ni les Éléments d'Euclide, ni les « Noces de la philologie et de Mercure » de Marcianus Capella, ne nous font connaître les plus beaux monuments qu'ait laissés la géométrie grecque ?

Non, les mathématiques ne sont pas restées stationnaires en Orient depuis Mohammed Ben Moûçâ jusqu'à Behâ Eddîn ; elles ont pris, à une époque intermédiaire, un essor et un développement dignes d'une véritable admiration. Les morceaux qui font l'objet de la publication présente sont choisis parmi les travaux de cette époque, et je m'estimerais heureux si on trouvait que leur contenu justifie réellement le jugement que je viens d'émettre.

Paris, le 10 juillet 1851.

TABLE DES MATIÈRES.

I. *Algèbre d'Alkhayyâmî.*

Pages.

Introduction..... 1

Tableau des équations..... 9

Équations binômes..... 13

Équations trinômes du second degré..... 17

Théorèmes préliminaires pour la construction des équations du troisième degré. 28

Équations trinômes du troisième degré..... 32

Équations quadrinômes du troisième degré..... 46

(Notice sur Alqoûhî, page 55.)

Équations à termes fractionnaires..... 69

(Notice sur Ibn-Alhaïtham, page 73.)

Remarques additionnelles d'Alkhayyâmî..... 81

II. *Additions.*

A..... 91

B..... 96

C..... 103

D..... 114

E..... 117

Le lecteur est prié de vouloir bien consulter les Errata *et* Corrigenda *indiqués à la fin du texte français.*

MÉMOIRE

DU SAGE EXCELLENT

GHIYÂTH EDDÎN ABOÛL FATH OMAR BEN IBRÂHÎM ALKHAYYÂMÎ DE NÎCHÂBOÛR

(que Dieu sanctifie son âme précieuse!)

SUR LES DÉMONSTRATIONS

DES PROBLÈMES DE L'ALGÈBRE.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux!

Louange au Dieu, seigneur des mondes, une fin heureuse à ceux qui le craignent, et point d'inimitié, si ce n'est contre les injustes. Que la bénédiction divine repose sur les prophètes, et particulièrement sur Mohammed et toute sa sainte famille.

Une des théories mathématiques dont on a besoin dans la partie des sciences philosophiques connue sous le nom des sciences mathématiques (*), c'est l'art de l'algèbre, lequel a pour but la détermination des inconnues, soit numériques, soit géométriques. Il se rencontre dans cette science des pro- 2
blèmes, dépendant de certaines espèces très-difficiles de théo-

*) Voici un passage tiré d'un manuscrit inédit de la Bibliothèque nationale, intitulé « Mémoires des Ikhwân Alçafâ », recueil encyclopédique, composé d'une suite de traités dont les premiers ont pour objet les sciences mathématiques : « Les sciences philosophiques se divisent en quatre espèces : 1° les sciences mathématiques, 2° les sciences logiques, 3° les sciences physiques, 4° les sciences métaphysiques. Les sciences mathématiques à leur tour se divisent en quatre parties : 1° l'arithmétique, 2° la géométrie, 3° l'astronomie, 4° la musique.» — Voyez aussi *Hadji Khalfa*, éd. de Fluegel, vol. I, introd., cap. I, sect. 4, « de divisionibus doctrinarum », et particulièrement p. 29-30 et p. 34, puis vol. III, p. 522.

rèmes préliminaires, dans la solution desquels ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupés. Quant aux anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrage qui en traite; peut-être, après en avoir cherché la solution et après les avoir étudiés, n'en avaient-ils pas pénétré les difficultés; ou peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue. Quant aux modernes, c'est Almâhânî (*) qui parmi eux conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par Archimède dans la quatrième proposition du second livre de son traité de la sphère et du cylindre; or il fut conduit à une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres, qu'il ne réussit pas à résoudre, après en avoir fait l'objet d'une longue méditation (**). On déclara donc que cette résolution était impossible, jusqu'à ce que

---

*) « Mohammed Ben Îçâ Abou Abdallah Almâhânî; au nombre des savants qui ont cultivé l'arithmétique et la géométrie; d'une force de génie célèbre entre tous les savants qui se sont occupés de ces matières. Il vécut à Bagdad, et a composé des ouvrages sur cette partie des sciences. Nous en citons : le traité des latitudes des étoiles, — le traité du rapport, — le traité intitulé Sur les vingt-six propositions du (premier) livre (des éléments) d'Euclide, dans la démonstration desquelles on n'a pas besoin de la supposition du contraire. » Je traduis ceci du Ms. du *Târîkh al Hoqamâ* que possède la Bibliothèque nationale, et qui est conforme dans ce passage au texte publié par *Casiri* (vol. I, p. 431). Au lieu de عروض « latitudes, » le Ms. du *Fihrist* de la même bibl. porte عروش, le Ms. du Fihrist de la bibl. de Leyde غروس (عروس?). Ce dernier Ms., au lieu de فى النسبة « du rapport » $\left(\frac{a}{b}\right)$, porte فى التشبيه « de la similitude ». Les Arabes se sont occupés surtout aussi de la composition des rapports تأليف النسب; voir à ce sujet *Chasles*, Aperçu historique, etc., note VI. Quant au troisième ouvrage cité, le Ms. parisien du Fihrist porte من المقالة الاولى, et puis التى لا يحتاج فى شىء منها الى الخلاف. Voici les vingt-six propositions dont il s'agit : 5, 8, 9, 13, 15-18, 20, 21, 24, 28, 30, 32-38, 41-44, 47, 48. Casiri n'a pas compris le sens de ce dernier passage. J'observe encore que plusieurs mathématiciens arabes ont écrit sur l'arrangement systématique des Éléments d'Euclide; j'ai rencontré dans les Mss. de la bibl. de Leyde deux mémoires de ce genre. — Voir encore, au sujet d'Almâhânî, *Notices et Extraits des manuscrits*, etc., t. VII, p. 58, 80, 102-112, 164. *D'Herbelot*, Bibl. orient., Paris, 1697, fol., p. 524, col. b, p. 532, col. a.

**) Voir ci-dessous la discussion de l'équation n° 17, et les additions A et B.

parût (*) Aboû Djafar Alkhâzin (**), qui résolut l'équation à l'aide des sections coniques. Après lui tous les géomètres avaient besoin d'un certain nombre des espèces des susdits théorèmes (***), et l'un en résolut une, et l'autre une autre. Mais aucun d'eux n'a rien émis sur l'énumération de ces espèces, ni sur l'exposition des cas de chaque espèce, ni sur leurs démonstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, que je ne manquerai pas de faire remarquer (****). Moi, au contraire, je n'ai jamais cessé de désirer vivement de faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi que de distinguer parmi les cas de chaque espèce les possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur des démonstrations; car je savais combien est urgent le besoin de ces théorèmes dans les difficultés des problèmes. Toutefois je ne pouvais pas m'appliquer d'une manière suivie à la composition d'un semblable exposé, ni lui vouer une méditation persévérante, empêché que j'en étais par les désastres survenus. Nous avons été témoin du dépérissement des hommes de la science, réduits maintenant à une mince troupe, dont le nombre est aussi petit que ses afflictions sont grandes, et à laquelle les rigueurs de la

---

*) La leçon تبع est confirmée en effet par la citation que *Hadji Khalfa* fait de ce passage (éd. de Fluegel, tom. II, p. 584); mais la leçon نبع que je dois à l'avis bienveillant de M. Reinaud m'a paru tellement préférable, que je n'ai pas hésité à la recevoir dans le texte.

**) « Aboû Djafar Alkhâzin, dont ce surnom est plus connu que son véritable nom, Persan d'origine, versé dans le calcul, la géométrie et la théorie des mouvements planétaires, habile à la fois dans la construction des instruments astronomiques et dans leur emploi, renommé pour cette partie des sciences dans son temps. Nous citons de ses écrits: la table des Safihas, l'ouvrage le plus célèbre et le plus complet qui existe sur cette matière; — le traité des problèmes arithmétiques. » Ici encore Casiri s'est trompé en traduisant: Liber Tabularum Latitudinum. Les Safihas forment une partie de l'astrolabe des astronomes arabes; on trouve à ce sujet d'amples détails dans l'excellent mémoire de M. *Sédillot* sur les instrum. astron. des Arabes, p. 154-162 et 185-191. — Outre les ouvrages mentionnés ci-dessus, la bibliothèque de Leyde possède un commentaire du dixième livre des Éléments d'Euclide, par Aboû Djafar Alkhâzin.

***) A savoir, des équations cubiques.

****) Voir p. 11 et 12, et les discussions des équations n° 17 et n° 21.

fortune ont imposé l'obligation commune de s'adonner, tant qu'elles durent, au perfectionnement et à l'exploration d'une
3 seule science. Mais la plupart de ceux qui par le temps actuel ont l'air de savants, déguisent la vérité par le mensonge, ne dépassent pas les limites de l'imposture et de l'ostentation savante, et ne font servir la quantité de savoir qu'ils possèdent qu'à des buts matériels et vils. Et s'ils rencontrent un homme distingué (*) par la recherche de la vérité et l'amour de la véracité, s'efforçant de rejeter la vanité et le mensonge, et d'abandonner l'ostentation et la tromperie, ils en font l'objet de leurs mépris et de leurs railleries. C'est Dieu que nous implorons en tout état, c'est lui qui est notre refuge.

Dieu m'a gratifié de l'intimité de son excellence notre glorieux et incomparable seigneur, le grand juge, l'imâm, le seigneur Aboû Tâhir, que Dieu prolonge son élévation et confonde ceux qui nourrissent contre lui de l'envie ou de l'inimitié! — lorsque j'avais désespéré déjà de jamais rencontrer un homme possédant aussi complétement toutes les perfections pratiques et théoriques, toutes, depuis la pénétration profonde dans les sciences jusqu'à la fermeté inébranlable dans ses actions et dans ses efforts de faire du bien à chacun de ses frères mortels. Sa présence dilate ma poitrine, sa société rehausse ma gloire; ma cause grandit en empruntant de la lumière à sa splendeur, et ma force est augmentée par sa munificence et par ses bienfaits. Je me sentis donc obligé de renouer le fil de ces recherches que m'avaient fait perdre les vicissitudes de la fortune, et de choisir parmi ce que j'ai approfondi en fait de la moelle des théories philosophiques avec quoi je puisse approcher de son siége sublime. C'est ainsi que j'ai commencé à énumérer ces

*) La ponctuation donnée dans le texte est celle du Ms. B. Dans les deux autres manuscrits le mot n'est pas ponctué du tout. Peut-être vaudrait-il mieux lire *moannayan* « qui se fatigue à rechercher, etc. ; » ce qui s'accorderait surtout avec le *moudjtahidan* suivant.

espèces de théorèmes algébriques, vu que les sciences mathématiques sont les plus dignes de la préférence. Et je saisis la corde du concours divin, espérant que Dieu m'assiste à poursuivre ce but, en indiquant avec exactitude jusqu'où s'étendent mes recherches et jusqu'où celles de mes prédécesseurs, dans ces parties des sciences nobles entre toutes les autres. J'appuie ma main sur l'anse solide de la protection du Très-Haut. C'est 4
lui qui est le seigneur de l'exaucement, et c'est sur lui que repose notre confiance en tout état.

Avec l'assistance de Dieu et avec son concours précieux, je dis : L'algèbre est un art scientifique. Son objet, ce sont le nombre absolu et les grandeurs mesurables, étant inconnus, mais rapportés à quelque chose de connu de manière à pouvoir être déterminés; cette chose connue est une quantité ou un rapport individuellement déterminé, ainsi qu'on le reconnaît en les examinant attentivement (*); ce qu'on cherche dans cet art, ce sont les relations qui joignent les données des problèmes à (l'inconnue), qui de la manière susdite forme l'objet de l'algèbre (**). La perfection de cet art consiste dans la connais-

*) Ou bien : « Et on arrive à cette chose connue en analysant l'énoncé du problème. » En effet, les données du problème, c'est-à-dire les coefficients de l'équation algébrique à laquelle on le ramène, ne sont presque toujours indiquées dans les énoncés qu'indirectement.

**) On peut comprendre ce passage de différentes manières, tant à cause des pronoms suffixes féminins qu'on peut rapporter soit à *cindah*, soit à *awâridou*, qu'à cause du mot *maoudoûon* employé deux fois de suite dans deux sens différents; enfin à cause du mot *awâridou*, qui proprement signifie « les accidents », par opposition à *maoudoûon*, « la substance »; de sorte qu'il faudrait traduire : « Ce sont les attributs qui joignent leur sujet à ce qui de la manière susdite forme l'objet de l'algèbre », ou « à ce qui ... constitue les données du problème »; car on trouve aussi le mot *maoudoûon* employé dans ce dernier sens, exprimé ordinairement par le mot *mafroûdon*. Le sens du passage reste cependant toujours essentiellement le même, c'est-à-dire que l'auteur veut parler des relations algébriques qui existent entre les données et l'inconnue, et que l'algébriste a à établir.— La définition donnée par l'auteur, et qui, grâce surtout aux pronoms suffixes, ne se distingue pas par la clarté, a cela de remarquable, qu'elle n'a plus du tout égard aux deux opérations préliminaires dont se compose le nom arabe de l'algèbre, et qui en effet ne constituent que la résolution des équations du premier degré. C'est un indice d'un état avancé de la science, d'un point de vue plus élevé, parfaitement en harmonie avec la manière supérieure dont l'auteur dans la suite traite son sujet.— Voir, pour d'autres définitions arabes de l'algèbre, *Hadji Khalfa*, éd. de

raison les degrés supérieurs (*). Et si l'on dit que le carré-carré fait partie des grandeurs mesurables, cela se dit par rapport à sa valeur réciproque employée dans les problèmes de mesure (**), et non pas parce que les quantités carré-carrées elles-mêmes soient mesurables, ce qui constitue une différence. Le carré-carré ne fait donc partie des grandeurs mesurables ni essentiellement ni accidentellement; et on ne peut le comparer au pair et à l'impair qui en font partie accidentellement, par rapport au nombre au moyen duquel la continuité des grandeurs mesurables est représentée comme discontinue.

Ce qu'on trouve dans les ouvrages des algébristes, relativement à ces quatre quantités géométriques, entre lesquelles se forment les équations, à savoir : nombres absolus, côtés, carrés et cubes, ce sont trois équations renfermant le nombre, des côtés et des carrés (***). Nous allons, au contraire, proposer des méthodes au moyen desquelles on pourra déterminer l'inconnue dans l'équation renfermant les quatre degrés dont nous venons de dire que ce sont eux exclusivement qui peuvent faire partie des grandeurs mesurables, à savoir : le nombre, la chose, le carré et le cube.

6 Les espèces d'équations dont la démonstration (****) dépend des propriétés du cercle, c'est-à-dire des deux ouvrages d'Euclide sur les Éléments et sur les Données, se démontrent bien facilement. Pour celles qu'on ne peut démontrer qu'à l'aide

---

*) Il suffit de rappeler que c'est *Descartes* qui a répondu victorieusement à cette argumentation, universellement adoptée avant lui.

**) Il est facile d'imaginer un semblable problème. Supposons, par exemple, qu'il soit question d'une sphère dont le volume soit à l'unité de volume comme une ligne donnée a à son rayon; en désignant ce rayon par r, on aura $\frac{a}{r^4} = \frac{4\pi}{3}$.

***) $x^2 + bx = a$, $x^2 + a = bx$, $x^2 = a + bx$. L'auteur, voulant parler ici du progrès qu'il a fait faire à l'algèbre, fait abstraction en cet endroit des trois formes $a = x$, $a = x^2$, $bx = x^2$, qui se trouvaient aussi dans les ouvrages de ses prédécesseurs, comme de problèmes tout à fait inférieurs.

****) C'est-à-dire la démonstration des procédés qui constituent leur résolution.

des propriétés des sections coniques, il faut s'en rapporter à ce qui est contenu dans les deux (premiers) livres des Coniques. Lorsque l'objet du problème est un nombre absolu (*), ni moi, ni aucun des savants qui se sont occupés d'algèbre, n'avons réussi à trouver la démonstration de ces équations (et peut-être un autre qui nous succédera comblera-t-il cette lacune), que lorsqu'elles renferment seulement les trois premiers degrés, à savoir : le nombre, la chose et le carré. Pour ces espèces, dont la démonstration s'effectue au moyen de l'ouvrage d'Euclide, j'en indiquerai la démonstration numérique (**). Et sachez que la démonstration géométrique de ces procédés ne rend pas superflue leur démonstration numérique, lorsque l'objet du problème est un nombre, et non pas une grandeur mesurable. Aussi voyez-vous bien qu'Euclide, après avoir démontré certains théorèmes relatifs à la proportionnalité des quantités géométriques, dans le cinquième livre de son ouvrage, donne derechef la démonstration exactement des mêmes théorèmes de proportionnalité, lorsque leur objet est un nombre, dans le septième livre (***).

Les équations ayant lieu entre ces quatre degrés sont, ou simples, ou composées. Des équations simples, il y a six espèces (****) :

1° Un nombre est égal à une racine;

2° Un nombre est égal à un carré;

3° Un nombre est égal à un cube;

---

*) C'est-à-dire lorsqu'il s'agit de satisfaire à l'équation proposée par un nombre entier. Voyez la préface.

**) Il faut toujours entendre : la démonstration de la résolution lorsqu'il s'agit de satisfaire à l'équation par un nombre entier. Je ne répéterai plus cette remarque dans la suite.

***) Voir *Eucl.*, Élém. VII, prop. 4-22.

****) 1° $a = x$; 2° $a = x^2$; 3° $a = x^3$;
4° $bx = x^2$; 5° $bx = x^3$; 6° $cx^2 = x^3$.
J'échange ici les numéros 5 et 6 l'un contre l'autre; c'est l'ordre suivi plus tard par l'auteur lorsqu'il discute ces équations une à une.

4° Des racines sont égales à un carré;

5° Des carrés sont égaux à un cube;

6° Des racines sont égales à un cube.

Trois de ces espèces se trouvent mentionnées dans les traités des algébristes (*). Ils disent : La chose est au carré comme le carré au cube; il suit donc nécessairement que l'égalité entre le carré et le cube soit équivalente à celle entre la chose et le carré (**), et de même le nombre est au carré comme la racine au cube (***); mais ils n'avaient pas démontré cela géo-
7 métriquement. Quant au nombre qui est égal au cube, il n'y a de moyen, pour trouver le côté de ce dernier, que par la connaissance préalable de la suite des nombres cubiques (****) lorsque le problème est numérique; lorsqu'il est géométrique, il n'est résoluble que par les sections coniques.

Les équations composées sont en partie trinomes, en partie quadrinomes. Les espèces des équations trinomes sont au nombre de douze. Les trois premières sont (*****) :

1° Un carré et des racines sont égaux à un nombre;

2° Un carré et un nombre sont égaux à des racines;

3° Des racines et un nombre sont égaux à un carré.

Ces trois espèces se trouvent mentionnées dans les traités des algébristes, et y sont démontrées géométriquement, mais pas numériquement.

---

*) A savoir, les numéros 1, 2, 4.

**) $x : x^2 = x^2 : x^3$ donc $ax^2 = x^3$ lorsque $ax = x^2$.

***) $a : x^2 = ax : x^3$ (donc $ax = x^3$ lorsque $a = x^2$).

****) Le mot « *istikrâ* » désigne proprement l'action d'aller de place en place; ensuite il indique un jugement par induction, fondé sur la connaissance des cas particuliers qu'on obtient en les parcourant l'un après l'autre (Voir *Notices et Extraits*, tome X, p. 42). En partant toujours de cette signification fondamentale bien établie, il faudra rendre ce terme de différentes manières, selon les circonstances. Voir p. 8 ult. sqq., p. 10, lig. 2, p. 33 passim, p. 48, lig. 5 du texte arabe, — et addition C, à peu près à la fin, où il est question du cas $\frac{C'}{C} = \frac{2}{1}$.

*****) 7° $x^2 + bx = a$; 8° $x^2 + a = bx$; 9° $bx + a = x^2$.

Les trois espèces suivantes sont (*) :

1° Un cube et des carrés sont égaux à des racines;

2° Un cube et des racines sont égaux à des carrés;

3° Des racines et des carrés sont égaux à un cube.

Les algébristes disent que ces trois secondes espèces sont proportionnelles aux trois premières, chacune à sa correspondante, c'est-à-dire que l'équation : « un cube et des racines sont égaux à des carrés » est équivalente à celle-ci : « un carré et un nombre sont égaux à des racines (**), » et de même relativement aux deux autres. Mais ils ne l'avaient pas démontré, lorsque les objets des problèmes sont des quantités mesurables. Pour le cas où l'objet des problèmes est un nombre, c'est une conséquence immédiate du traité des Éléments (***). Or, j'en démontrerai aussi le cas géométrique.

Les six espèces qui restent des douze, ce sont (****) :

1° Un cube et des racines sont égaux à un nombre;

2° Un cube et un nombre sont égaux à des racines;

3° Un nombre et des racines sont égaux à un cube;

4° Un cube et des carrés sont égaux à un nombre;

5° Un cube et un nombre sont égaux à des carrés;

6° Un nombre et des carrés sont égaux à un cube.

De ces six espèces rien n'a paru dans les traités d'algèbre, excepté la discussion isolée d'une d'entre elles (*****). Moi, je les 8
discuterai et les démontrerai géométriquement, pas numériquement. La démonstration de ces six espèces n'est possible qu'au moyen des propriétés des sections coniques.

---

*) 10° $x^3 + cx^2 = bx$; 11° $x^3 + bx = cx^2$; 12° $cx^2 + bx = x^3$;

**) $x^3 + bx = cx^2$, divisé par x, donne $x^2 + b = cx$.

***) Vu la proportionnalité qui a lieu entre ces équations et les trois précédentes. Voir page 6, ult.

****) 13° $x^3 + bx = a$; 14° $x^3 + a = bx$; 15° $bx + a = x^3$.
16° $x^3 + cx^2 = a$; 17° $x^3 + a = cx^2$; 18° $cx^2 + a = x^3$.

*****) Voir la discussion de l'équation n° 17.

Quant aux équations composées quadrinomes, il y en a deux classes : premièrement, celles dans lesquelles trois degrés sont égalés à un degré. Ce sont quatre espèces (*) :

1° Un cube, des carrés et des racines sont égaux à un nombre;

2° Un cube, des carrés et un nombre sont égaux à des racines;

3° Un cube, des racines et un nombre sont égaux à des carrés;

4° Un cube est égal à des racines, des carrés et un nombre.

La seconde classe comprend celles dans lesquelles deux degrés sont égalés à deux degrés. Il y en a trois espèces (**) :

1° Un cube et des carrés sont égaux à des racines et un nombre;

2° Un cube et des racines sont égaux à des carrés et un nombre;

3° Un cube et un nombre sont égaux à des racines et des carrés.

Ce sont là les sept espèces quadrinomes : aucune desquelles nous n'avons réussi à résoudre que géométriquement. Un de nos prédécesseurs avait besoin d'un cas particulier d'une de ces espèces, que je ne manquerai pas de faire remarquer (***). La démonstration de ces espèces ne peut être effectuée qu'à l'aide des propriétés des sections coniques.

Maintenant je vais discuter et démontrer, une à une, toutes ces vingt-cinq espèces; et j'implore l'assistance de Dieu : quiconque se confie sincèrement à lui, Dieu le dirige et lui suffit.

Première espèce des équations simples. « UNE RACINE EST

---

*) 19° $x^3+cx^2+bx=a$; 20° $x^3+cx^2+a=bx$;
21° $x^3+bx+a=cx^2$; 22° $cx^2+bx+a=x^3$;
**) 23° $x^3+cx^2=bx+a$; 24° $x^3+bx=cx^2+a$; 25° $x^3+a=cx^2+bx$.
***) Voir la discussion de l'équation n° 21.

ÉGALE A UN NOMBRE (*). » Donc, la racine est nécessairement connue; ce qui va également pour le nombre et pour les quantités géométriques.

Seconde espèce. « UN NOMBRE EST ÉGAL A UN CARRÉ (**). » Le carré numérique sera donc connu, étant égal au nombre connu; sa racine ne peut être trouvée numériquement que par la connaissance préalable de la suite des nombres carrés: car ce n'est que de cette manière qu'on sait, par exemple, que 9
la racine de vingt-cinq est cinq, et non pas par un procédé algébrique. Nous n'aurons, à ce sujet, aucun égard à ce qu'en disent ceux, parmi les algébristes, qui sont d'un avis différent. Les Indiens possèdent des méthodes pour trouver les côtés des carrés et des cubes (***), fondées sur une telle connaissance d'une suite de nombres peu étendue, c'est-à-dire sur la connaissance des carrés des neuf chiffres, à savoir, du carré de un, de deux, de trois, etc., ainsi que des produits formés en les multipliant l'un par l'autre, à savoir, du produit de deux en trois, etc. J'ai composé un ouvrage sur la démonstration de l'exactitude de ces méthodes, et j'ai prouvé qu'elles conduisent en effet à l'objet cherché. J'en ai, en outre, augmenté les espèces, c'est-à-dire que j'ai enseigné à trouver les côtés du carré-carré, du quadrato-cube, du cubo-cube, etc., à une étendue quelconque, ce qu'on n'avait pas fait précédemment. Les démonstrations que j'ai données à cette occasion ne sont que des démonstrations arithmétiques (****), fondées sur les parties arithmétiques des Éléments d'Euclide (*****).

---

*) I, $a = x$.

**) II, $a = x^2$; $x = \sqrt{a}$.

***) C'est-à-dire : pour l'extraction des racines carrées et cubiques. — Ce que l'auteur dit des méthodes indiennes s'accorde avec ce que nous en savons par l'ouvrage de *Colebrooke*.

****) Quant à la restriction exprimée par l'auteur, il faut l'entendre ainsi : « Je n'en ai pas donné en même temps des démonstrations géométriques. »

*****) Ce que l'auteur dit ici de son ouvrage sur les démonstrations mathématiques de l'ex-

La démonstration géométrique de la seconde espèce est la suivante (*). Supposons que la ligne AB (fig. 1) soit donnée et égale au nombre donné, et que AC soit égale à l'unité et perpendiculaire à AB. Complétons le rectangle AD. Il est connu alors que la mesure du rectangle AD est ce nombre donné. Nous construisons ensuite un carré égal au rectangle AD, lequel soit le carré E, ainsi qu'il a été expliqué par Euclide dans la quatorzième proposition du second livre de son ouvrage. Le carré E sera donc égal au nombre donné et connu, et son côté sera pareillement connu, vu la démonstration donnée par Euclide. Mais c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Toutes les fois que nous dirons dans ce Traité : « un nombre est égal à un rectangle », nous entendrons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des côtés est l'unité, et le second une ligne égale en mesure au nombre donné, en sorte que chacune des parties de sa mesure soit égale au second côté, c'est-à-dire à celui qui a été pris pour unité.

Troisième espèce. « UN NOMBRE EST ÉGAL A UN CUBE (**). » Si l'objet du problème est un nombre, le cube sera donc connu; et il n'y a d'autre moyen pour en trouver le côté, que

---

traction des racines des degrés supérieurs quelconques me semble être d'une importance plus que médiocre pour l'histoire des mathématiques chez les Arabes. On sait qu'après la renaissance des lettres, ce furent *Stifel* et *Viète* qui abordèrent ce sujet (voyez *Francisci Vietæ* opera mathematica in unum volumen congesta, ed. Fr. a Schooten; Lugduni Batavorum, 1646, fol., p. 163 sqq., de numerosa potestatum purarum resolutione). Je fais observer que l'extraction de la racine d'un degré quelconque dépend de la formule

$$a^m+ma^{m-1}b+m_2a^{m-2}b^2+m_3a^{m-3}b^3+\ldots+b^m+$$
$$+m(a+b)^{m-1}c+m_2(a+b)^{m-2}c^2+m_3(a+b)^{m-3}c^3+\ldots+c^m+$$
$$+m(a+b+c)^{m-1}d+m_2(a+b+c)^{m-2}d^2+m_3(a+b+c)^{m-3}d^3+\ldots+d^m+$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+m(a+b+c+\ldots+p)^{m-1}q+m_2(a+b+c+\ldots+p)^{m-2}q^2+m_3(a+b+c+\ldots+p)^{m-3}q^3+\ldots+q^m=$$
$$=(a+b+c+d+\ldots+p+q)^m,$$

en désignant par m_2, m_3 etc., les coefficients binomiaux. Comparer à ce sujet une notice historique qui se trouve dans les *Nouvelles annales de mathématiques* réd. par MM. Terquem et Gerono, tom. V, pag. 491 sqq. — Le mot arabe *istiksâtoun* est une corruption de στοιχεῖα.

*) $x^2 = a = a \cdot 1 =$ AB . AC = carré E, donc le côté de E $= x$.

**) III, $a = x^3$; $x = \sqrt[3]{a}$.

la connaissance préalable de la suite des nombres cubes, ce qui va également pour toutes les puissances numériques, telles que carré-carré, quadrato-cube, cubo-cube, ainsi que nous l'avons dit dès l'abord.

Quant à la démonstration géométrique (*), nous supposons que le carré AD (fig. 2) soit le carré de l'unité, c'est-à-dire que AB soit égal à BD, et que chacun de ces deux côtés soit supposé égal à l'unité. Puis, nous élevons sur le plan AD, au point B, une perpendiculaire BC, en la faisant égale au nombre donné, ainsi qu'il a été exposé par Euclide dans le onzième livre de son ouvrage (**). Complétons le solide ABCDEZH. Il est connu que la mesure de ce solide doit être égale au nombre donné. Puis nous construisons un cube égal à ce solide. Mais la construction de ce cube ne s'effectue qu'au moyen des propriétés des sections coniques. Nous la différons donc jusqu'à ce que nous ayons donné des théorèmes préliminaires qui se rapportent à ces propriétés.

Toutes les fois que nous dirons : « un nombre est égal à un solide», nous entendrons ici par le nombre un solide à côtés parallèles et à angles droits, ayant pour base le carré de l'unité, et dont la hauteur est égale au nombre donné.

Quatrième espèce. « UN CARRÉ EST ÉGAL A CINQ DE SES RACINES (***). » Alors le nombre des racines est la racine du carré. La démonstration arithmétique consiste en ce que la racine multipliée par elle-même produit le carré, et que la même racine multipliée par cinq produit également le carré : elle est donc égale à cinq. La démonstration géométrique

---

*) $x^3 = a = a \cdot 1 \cdot 1 =$ BC . AB . BD.

**) Éléments, XI, 12.

***) IV, $bx = x^2$ $(5x = x^2)$; $x = b$.

Démonstr. $x.x = x^2$, $b.x = x^2$; donc $x.x = b.x$ ou $x = b$.

est analogue à cela; on suppose un carré égal à cinq de ses côtés.

Cinquième espèce. « DES CHOSES SONT ÉGALES A UN CUBE(*). » Si le problème est numérique, il est évident que cette espèce est équivalente à celle-ci : « un nombre est égal à un carré. » Par exemple : « quatre racines sont égales à un cube », est la même chose que si l'on disait : « quatre en nombre est égal à un carré, » vu l'existence de la proportionnalité mentionnée ci-dessus (**).

Quant à la démonstration géométrique(***), nous supposons un cube ABCDE (fig. 3) dont la mesure soit égale à quatre de
11 ses côtés, et dont le côté soit AB. Alors son côté AB, multiplié par quatre, produira le cube ABCDE, et en même temps son côté, multiplié par son carré, c'est-à-dire par le carré AC, produit le cube; donc le carré AC est égal à quatre.

Sixième espèce. « DES CARRÉS SONT ÉGAUX A UN CUBE (****). » Cela équivaut à : « un nombre est égal à une racine. »

La démonstration arithmétique consiste en ce que le nombre est à la racine comme des carrés sont au cube, ainsi que cela se trouve expliqué dans le huitième livre des Éléments (*****).

---

*) V, $bx = x^3$ équivaut à $b = x^2$.

**) Voir page 10. — J'ai dû conserver, ici et dans la suite, l'expression « en nombre », pour mieux rendre le sens du texte original. Voir la préface.

***) 4 . AB = $\overline{AB}^3$ = cube ABCDE
(carré AC) . AB = (carré AC) . BD = cube ABCDE,
donc 4 . AB = (carré AC) . AB ou 4 = carré AC = $\overline{AB}^2$.

****) VI, $cx^2 = x^3$ équivaut à $c = x$.
Démonstr. $c : x = cx^2 : x^3$, donc $cx^2 = x^3$ dès que $c = x$.

*****) Je ne saurais assigner aucune proposition du huitième livre que l'auteur eût ici pu avoir en vue. Cela m'a fait penser que peut-être le texte portait originairement في يا من الاصول « dans le onzième livre des Éléments », conjecture qui serait corroborée en quelque sorte par la leçon ثامن du manuscrit C. En effet, la proposition XI, 34, implique comme cas spécial le théorème qui serait l'expression géométrique de la démonstration dont il s'agit ici. Toutefois je considère cette supposition comme très-improbable, vu que l'auteur distingue toujours rigoureusement les démonstrations géométriques des démonstrations

Quant à la démonstration géométrique (*), nous supposons le cube ABCDE (fig. 3) égal au nombre de ses carrés, par exemple, égal à deux carrés. Le carré de son côté est AC. Donc la surface AC, multipliée par deux, produira le cube ABCDE; et en même temps, multipliée par BD, qui est (égale au) côté de ce (carré), elle produit également le cube ABCDE. Donc BD, qui est le côté de ce cube, sera égale à deux; et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Toutes les fois que nous dirons, dans ce traité, « carrés du cube, » nous entendrons par cette expression des carrés de son côté.

Après avoir terminé la discussion des équations simples, passons maintenant à celle des trois premières des douze équations trinômes.

Première espèce. « UN CARRÉ ET DIX RACINES SONT ÉGAUX A TRENTE-NEUF EN NOMBRE (**). » Multipliez la moitié (du nombre) des racines par elle-même. Ajoutez le produit au nombre, et retranchez de la racine de la somme la moitié (du nombre) des racines. Le reste est la racine du carré.

Si le problème est arithmétique, deux conditions doivent être remplies; la première : que le nombre des racines soit pair, de sorte qu'il ait une moitié (entière); la seconde : que le carré de la moitié (du nombre) des racines et le nombre, ajou-

---

arithmétiques. Mais, au lieu du *huitième livre*, on pourrait citer la *huitième proposition* du neuvième livre; en effet, celle-ci comporte que

$$1 : x = x^2 : x^3 \quad \text{d'où il suit} \quad c : x = cx^2 : x^3.$$

*) 2.(carré AC) $= 2\,\overline{BD}^2 = \overline{BD}^3 =$ cube ABCDE
BD.(carré AC) $=$ cube ABCDE,
donc 2.(carré AC) = BD . (carré AC) ou 2 = BD.

**) VII, $x^2 + bx = a$ $(x^2 + 10x = 39)$; $\sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} = x.$

Je fais observer que Mohammed Ben Moûçâ énonce cette équation sous la même forme spéciale, qu'Alkhayyâmî a gardée peut-être comme consacrée par l'usage.

tés ensemble, produisent un nombre carré. Sinon, le problème, considéré comme arithmétique, est impossible (*). Géométriquement, cette espèce ne comprend pas de problèmes impossibles du tout.

La démonstration arithmétique est facile, et conforme à la démonstration géométrique. Voici cette dernière (**). Nous supposons le carré AC (fig. 4) ensemble avec dix de ses racines égal à trente-neuf en nombre. Supposons encore que dix de ses racines soient représentées par le rectangle CE. La ligne
12 DE sera donc égale à dix. Divisons-la, au point Z, en deux parties égales. Alors, parce que la ligne DE a été divisée en deux parties égales au point Z, et qu'on lui a ajouté en ligne droite la partie AD, le produit de EA en AD, qui est égal au rectangle EB, ajouté au carré de DZ, sera égal au carré de ZA. Mais le carré de DZ, qui est la moitié (du nombre) des racines, est connu, et le rectangle BE, qui est le nombre donné, est également connu. Par conséquent, le carré de ZA et la ligne ZA seront connus; et lorsque nous retranchons ZD de ZA, le reste AD sera connu.

---

*) Ici l'auteur se trompe; aucune des deux conditions n'est nécessaire pour que x soit entier. Désignons par σ un nombre positif et irrationnel, par α un nombre positif et entier; supposons $\sigma > \alpha$ et $a = \sigma . \alpha$, $b = \sigma - \alpha$. Certainement $\sigma - \alpha$ ne sera pas alors un nombre pair, ni $\sigma . \alpha + \left(\frac{\sigma-\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma+\alpha}{2}\right)^2$ un nombre carré, vu que sa racine $\frac{\sigma+\alpha}{2}$ est irrationnelle; toutefois $x = \sqrt{\sigma.\alpha + \left(\frac{\sigma-\alpha}{2}\right)^2} - \frac{\sigma-\alpha}{2} = \alpha$ sera un nombre entier.

**) AD = AB = x, DE = 10, BE = 39, DZ = ZE = $\frac{DE}{2}$;

EA . AD + $\overline{DZ}^2 = \overline{ZA}^2$ (Euclide, Éléments, II, 6) ou BE + $\overline{DZ}^2 = \overline{ZA}^2$;

BE et DZ étant connus, il en sera de même pour ZA et pour (ZA — ZD) = AD = x.

Voici le principe de cette démonstration : la proposition d'Euclide exprime que $(b+x)\,x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$; mais on avait $(b+x)\,x = x^2 + bx = a$, donc $a + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$ ou $\sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} = x$.

Autre démonstration (*). Supposons que ABCD (fig. 5) soit un carré; prolongeons BA jusqu'à E, et faisons EA égale à un quart (du nombre) des racines, c'est-à-dire à deux et demi. Prolongeons DA jusqu'à Z, en faisant ZA égale à un quart (du nombre) des racines. Menons d'une manière semblable des lignes de tous les sommets du carré, et complétons la figure HT. Elle sera un carré, parce que ZE, AC et CT sont des carrés, vu ce qui se trouve exposé dans le sixième livre des Éléments (**). Les quatre carrés situés dans les coins du grand carré sont égaux chacun au carré de deux et demi; conséquemment leur somme sera égale à vingt-cinq, c'est-

---

*) $AB = BC = x$, $EA = ZA = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$, $EZ = \frac{25}{4}$, $4\,EZ = 25$;

$ZB = ZA.AB = 2\frac{1}{2}\,AB$, $4\,ZB = 10\,AB$; $\overline{AB}^2 + 10\,AB = 39$, $\overline{AB}^2 + 4\,ZB = 39$;

$HT = \overline{AB}^2 + 4\,ZB + 4\,EZ = 39 + 25 = 64$;

$x = AB = EM - (EA + BM) =$ côté de $HT - 2\,EA = \sqrt{64} - \frac{10}{2} = 3$.

Le principe de cette démonstration consiste à compléter le carré; en effet, nous avons

$HT = x^2 + 4\left(\frac{b}{4}x\right) + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, et en même temps, parce que $x^2 + bx = a$,

$HT = x^2 + 4\left(\frac{b}{4}x\right) + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = a + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, donc $a + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ ou $\sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} = x$.

Cette démonstration est essentiellement la même que celle donnée par Mohammed Ben Moûçâ; voyez l'édition de Rosen, pages 13 et A. Mohammed Ben Moûçâ en ajoute une seconde, dont voici l'exposé (voir fig. 5, *a*) :

Équation proposée : $x^2 + 10\,x = 39$.

Démonstr. : $AB = x^2$; $G = D = \frac{10}{2}\,x$;

$$AB + (G + D) = x^2 + 2\left(\frac{10}{2}x\right) = 39 \;.\; - \ldots a$$

$$SH - \{AB + (G + D)\} = SH - 39 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \;.\; - \ldots \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$SH = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 64; \ldots a + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{côté de } SH = \sqrt{64} = 8; \ldots \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$x = \text{côté de } AB = 8 - \frac{10}{2} = 3 \;.\; - \ldots \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

**) Euclide, Éléments, VI, 24.

à-dire au carré de la moitié (du nombre) des racines. Le rectangle ZB est égal à deux et demie des racines du carré AC, parce que ZA est égale à deux et demi. Les quatre rectangles seront donc ensemble égaux à dix racines du carré AC. Mais on avait supposé le carré AC ensemble avec dix de ses racines égal à trente-neuf en nombre. Conséquemment le carré HT est égal à soixante-quatre. Prenons-en la racine, et retranchons d'elle cinq. Il reste AB.

Supposons encore (*) qu'une ligne AB (fig. 6) soit donnée égale à dix, et que l'on demande le carré qui, ajouté au produit de son côté en AB, soit égal au nombre donné. Représentons le nombre donné par la figure E, laquelle soit un parallélogramme à angles droits, ainsi que nous l'avons dit précédemment (**). Appliquons à la ligne AB un parallélogramme égal au rectangle E et excédant d'un carré, ainsi qu'Euclide l'a expliqué dans le sixième livre des Éléments. Que ce soit le rectangle BD, et que le carré excédant soit AD; le côté AC de ce carré sera connu, conformément à ce qui se trouve établi dans les Données (***).

13

Seconde espèce. « UN CARRÉ ET UN NOMBRE SONT ÉGAUX A DES RACINES (****). » Il est nécessaire, dans cette espèce, que le nombre ne soit pas plus grand que le carré de la moitié (du nombre) des racines. Sinon, le problème est impossible. Lorsque le nombre est égal au carré de la moitié (du nombre) des racines, la moitié (du nombre) des racines est elle-même la racine du carré. Lorsque le nombre est plus petit, on le re-

*) AB = 10, E = 39. La construction d'Euclide, Éléments VI, 29, implique la détermination d'une ligne AC telle que $BD = \overline{AC}^2 + AC \cdot AB = E$; donc $x = AC$.

**) Pag. 14, lig. 12.

***) Prop. 59, éd. d'Oxford, 1703, fol., p. 497.

****) VIII, $x^2 + a = bx$ $(b = 10)$.

Condition : $a \leqq \left(\frac{b}{2}\right)^2$ (sans cela en effet x est imaginaire)

1) $a = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \ldots x = \frac{b}{2}$ 2) $a < \left(\frac{b}{2}\right)^2 \ldots x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$.

tranche du carré de la moitié (du nombre) des racines, on prend la racine du reste et on l'ajoute à la moitié (du nombre) des racines, ou la retranche de cette dernière. Le résultat, tant de l'addition que de la soustraction, est la racine du carré.

La démonstration arithmétique est conforme à la démonstration géométrique (*) (qui suit). Supposons un carré ABCD (fig. 7), et supposons (le rectangle) ED, égal au nombre, joint à ce carré du côté de AD. Le rectangle (produit) EC sera donc égal à dix (**) côtés du carré AC, et conséquemment EB sera égale à dix. Que dans la première figure (7, 1) AB soit égale à la moitié de EB, dans la seconde (7, 2) plus grande, et dans la troisième (7, 3) plus petite que la moitié de EB. Alors, dans la première figure, AB sera égale à cinq. Dans la seconde et dans la troisième figure, divisons EB au point Z, en sorte que la ligne EB soit divisée en deux parties égales au point Z, et en deux parties inégales au point A. Donc, le rectangle EA en AB, ajouté au carré de ZA, sera égal au carré de ZB, ainsi qu'il est expliqué au second livre des Éléments. Le rectangle EA en AB, étant égal au nombre, est connu; conséquemment, lorsqu'on le retranche du

---

*) AB = AD = x, ED = a, EC = 10 . AB = bx, EB = 10 = b;

1) $x = AB = \frac{EB}{2} = 5$;

2) / 3) AB $\gtrless \frac{EB}{2}$, EZ = ZB, EA.AB + $\overline{AZ}^2 = \overline{BZ}^2$ (Euclide, Éléments, II, 5);

EA.AB = ED = a et BZ = $\frac{BE}{2} = \frac{b}{2}$ étant connus, on connaîtra donc

$\overline{AZ}^2$ et AZ, ainsi que 2) / 3) ZB $\pm$ AZ = AB = x . —

Voici le principe de cette démonstration: la proposition d'Euclide implique pour les cas 2) et 3) que $x\,(b - x) + \left[\pm\left(x - \frac{b}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, mais $xb - x^2 = a$, donc $\pm\left(x - \frac{b}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$ ou $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$. Au cas 1. le radical disparaît, parce que $a = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, donc $x = \frac{b}{2}$.

**) La valeur spéciale adoptée ici, rappelle encore l'énoncé donné de cette équation par Moh. Ben Moûçâ.

carré de ZB, qui est la moitié (du nombre) des racines, le carré de ZA, qui reste, sera connu. En retranchant dans la troisième figure ZA de ZB, et dans la seconde figure en ajoutant ZA à ZB, on obtient pour reste ou pour somme la ligne AB. Et c'est ce qu'il s'agissait de trouver.

On peut, si l'on veut, démontrer cela encore d'autres manières (*); mais nous nous bornons à ceci, de peur d'être prolixe. Supposons (**) qu'une ligne AB (fig. 8) soit donnée égale à dix, et qu'on demande à retrancher d'elle une ligne telle que, lorsqu'on la multiplie par AB, ce produit soit égal au carré de cette même ligne, plus un autre rectangle, lequel ne soit pas plus grand que le carré de la moitié de AB, c'est-à-dire plus le nombre donné qui soit représenté par le rectangle E. Nous nous proposons donc de retrancher de AB une ligne dont
14 le carré plus le rectangle E soit égal au produit de AB en

---

*) Voici l'exposé de la démonstration que Mohammed Ben Moûçâ (édition de Rosen, page 16 et ||) donne de cette espèce (voyez fig. 7, a) :

Équation proposée : $x^2 + 21 = 10\,x$.

Démonstration : $AD = x^2$; $HB = 21$; $HD = HN.HC = x.10$;

$$CG = HG = \frac{HC}{2} = \frac{10}{2} = 5;\ GK = CG - GT = 5 - x;$$

$$TK = GK + GT = CG = 5;\ NT = HG = CG = 5;$$

$$MT = 25 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 .-\ldots \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$KL = KG;\ ML = KM - KL = KT - KG = TG;$$

$$LR = KG = CG - GT = CG - CA = GA;$$

$$ML \,.\, LR = TG \,.\, GA,\ MR = TA;$$

$$HT + MR = HT + TA = HB = 21;\ \ldots a$$

$$KR = MT - (HT + MR) = 25 - 21 = 4;\ \ldots \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a$$

$$RG = \sqrt{4} = 2;\ \ldots \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$$

$$x = AC = CG - GA = CG - RG = 5 - 2 = 3.-\ldots \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a};$$

puis Mohammed Ben Moûçâ ajoute seulement que $5 + 2$ satisfera aussi à l'équation proposée, sans le démontrer.

**) $AB = 10 = b$, $E = a$. La construction d'Euclide, Éléments VI, 28, implique la détermination d'une ligne BC telle que $E = AZ = AB \,.\, BC - \overline{BC}^2$ ou $\overline{BC}^2 + a = b \,.\, BC$ donc $BC = x$.

cette ligne. Or, appliquons à la ligne connue AB un rectangle égal au rectangle connu E et défaillant d'un carré, ce qui est possible (*), parce que le rectangle E n'est pas plus grand que le carré de la moitié de AB. Que ce soit le rectangle AZ, et que le carré défaillant soit CD, conformément à ce qui est exposé par Euclide dans le sixième livre des Éléments. Le côté CB sera alors connu, ainsi qu'il est expliqué dans les Données (**). Mais c'est ce qu'il s'agissait de montrer.

Il est évident que cette espèce comprend différents cas (***), et qu'elle donne lieu à des problèmes impossibles (****). Quant aux conditions de sa solubilité en nombres entiers, elles peuvent être déduites de ce que nous en avons dit à l'occasion de la première espèce (*****).

Troisième espèce. « UN NOMBRE ET DES RACINES SONT ÉGAUX A UN CARRÉ (******). » On ajoute le carré de la moitié (du nombre) des racines au nombre, puis on prend la racine de la somme, et l'ajoute à la moitié (du nombre) des racines. Ce qui résulte est la racine du carré.

---

*) Voir Euclide, Éléments, VI, 27, 28.

**) Prop. 58.

***) A savoir les cas $x \gtreqless \frac{b}{2}$

****) A savoir lorsque $a > \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

*****) En ce cas-ci, une des deux valeurs pourra être entière sans qu'aucune des deux conditions dont veut parler l'auteur soit remplie; on n'a qu'à supposer $a = \sigma.\alpha$, $b = \sigma + \alpha$, une des deux solutions sera α. Mais même afin de les rendre entières toutes les deux, la première condition, que b soit pair, n'est pas nécessaire; et quant à la seconde, que $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a$ doit être un nombre carré, il est nécessaire seulement que cette expression soit de la forme $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, p désignant un nombre entier pair ou impair. Pour s'en convaincre, il suffit de supposer $a = \alpha.\beta$, $b = \alpha + \beta$ en désignant par α un nombre positif, entier et pair, par β un nombre positif, entier et impair.

******) IX, $bx + a = x^2$; $\frac{b}{2} + \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = x$.

Démonstration (*). Que le carré ABCH (fig. 9) soit égal à cinq de ses racines plus six en nombre. Retranchons-en le nombre qui soit représenté par le rectangle AD. Il reste le rectangle EC, égal au nombre de racines, lequel est cinq. La ligne EB sera donc égale à cinq. Nous la divisons en deux parties égales au point Z. La ligne EB sera donc divisée en deux parties égales au point Z, et en même temps on lui a ajouté la partie EA, d'où il suit (**) que le rectangle BA en AE, c'est-à-dire le rectangle connu AD, plus le carré connu de EZ, est égal au carré de ZA. Le carré de ZA et ZA seront donc connus. Mais ZB est connue; conséquemment AB est connue.

Il existe encore d'autres démonstrations de ce théorème (***), la recherche desquelles peut servir d'exercice au lecteur.

---

*) $\overline{AB}^2 = 5AB + 6$; $AB = AH = x$, $AD = 6$, $EC = 5AB$, $EB = 5$, $EZ = ZB = \frac{EB}{2}$;

$BA \cdot EA + \overline{EZ}^2 = \overline{ZA}^2$ ou $AD + \overline{EZ}^2 = \overline{ZA}^2$;

mais AD et EZ étant connus, $\overline{ZA}^2$, ZA et $ZA + ZB = AB = x$ seront également connus. La proposition citée d'Euclide implique en ce cas-ci que

$x(x-b) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$; mais on a $x(x-b) = x^2 - bx = a$,

donc $a + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$ ou $\frac{b}{2} + \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = x$.

**) Euclide, Éléments, II, 6.

***) Voici l'exposé de celle donnée par Mohammed Ben Moûçâ (édition de Rosen, p. 19 et \|r — voir fig. 9, *a*).

Équation proposée : $3x + 4 = x^2$.

Démonstration : $AD = x^2$; $HC = 3$, $HD = 3x$; $HB = AD - HD = x^2 - 3x = 4$. — ... *a*

$CG = GH = \frac{HC}{2} = \frac{3}{2}$; $HT = \overline{HG}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$. — ... $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$TL = AH$; $GT = GH$; $GT + TL = GH + HA$, $GL = GA$; $MA = GL = GA$;

donc 1) $AB - MA = AC - GA$, $BM = CG = GH = LN$

2) $GL - GT = GA - GH$, $TL = AH = MN$;

$BM \cdot MN = TL \cdot LN$, $BN = TN$;

$4 = HB = AN + BN = AN + TN$;

$GM = HT + (AN + TN) = 2\frac{1}{4} + 4$; ... $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a$

$AG = \sqrt{2\frac{1}{4} + 4} = 2\frac{1}{2}$; ... $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a}$

$x = AG + CG = 2\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4$. — ... $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a} + \frac{b}{2}$.

Supposons encore (*) que la ligne BE (fig. 10) soit égale au nombre des racines, et qu'on demande un carré et son côté, en sorte que ce carré soit égal au nombre (donné) de ses côtés plus le nombre donné. Que le nombre donné soit représenté par le rectangle T, et que H soit un carré égal à ce rectangle. Construisons un carré égal à la somme du carré H et du carré de EK, ligne qui est égale à la moitié du nombre des racines. Que le carré construit soit Z. Faisons KC égale au côté de Z, et complétons le carré ABCD. Celui-ci sera le carré qu'il s'agissait de trouver.

Il est évident que ni cette troisième espèce ni la première ne donnent lieu à rien d'impossible, tandis que c'est le cas pour la seconde espèce, laquelle en même temps comprend différents cas, ce qui n'arrive pas dans les deux autres.

Démontrons maintenant que les espèces de la seconde triade de ces équations sont proportionnelles à celles de la première.

Première espèce. « UN CUBE ET DES CARRÉS SONT ÉGAUX A DES RACINES (**). » Supposons un cube ABCDE (fig. 11), prolongeons AB en ligne droite jusqu'à Z, faisons AZ égale au nombre des carrés, et complétons le solide AZHTCD en guise de prolongement du cube AE, comme cela se fait habituellement. Le solide AT sera égal au nombre de carrés, et le solide

---

*) $EB = b$, $T = H = a$, $EK = \frac{EB}{2} = \frac{b}{2}$;

$Z = H + \overline{EK}^2 = a + \left(\frac{b}{2}\right)^2$; KC = côté de $Z = \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$;

$BC = BK + KC = \frac{b}{2} + \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = x.$

Je remarque qu'ici l'auteur ne construit pas l'équation carrée proposée, ainsi que c'était le cas dans ce qui précède, mais la racine de cette équation qu'il prend toute résolue.

**) x, $x^3 + cx^2 = bx$.

Démonstr. : cube ABCDE $= x^3$, AZ $= c$, AZHTC $= cx^2$, BT $= x^3 + cx^2 = bx$;
K $= b$, AD $= x$, K . AD $= b \cdot x$; HB . AD $=$ BT $= bx$; donc
K . AD $=$ HB . AD et K $=$ HB $=$ BC $+$ HA ou $b = x^2 + cx$.

BT, qui est égal au cube plus le nombre donné de carrés, sera égal au nombre donné de racines. Construisons un rectangle K égal au nombre donné des racines; la racine, c'est le côté du cube, c'est-à-dire AD. Donc le rectangle K, multiplié par AD, sera égal au nombre donné de côtés. D'un autre côté, le rectangle HB, multiplié par AD, produit le cube plus le nombre donné de carrés. Mais ces deux solides sont égaux; c'est-à-dire le solide BT et le solide construit sur K et ayant pour hauteur AD. Conséquemment, leurs bases seront réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Or, leurs
16 hauteurs étant égales, leurs bases nécessairement le seront aussi. Mais la base HB est égale au carré CB plus le rectangle HA qui est égal à ce nombre de racines (de CB) qui avait été donné pour les carrés. Donc K, qui est le nombre donné pour les racines, est égal au carré plus le nombre de racines donné pour les carrés. Mais c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

Voici un exemple de cette espèce. Un cube et trois carrés sont égaux à dix racines; cela équivaut à: un carré et trois racines sont égaux à dix en nombre.

Seconde espèce. « UN CUBE ET DEUX RACINES SONT ÉGAUX A TROIS CARRÉS (*). » Cela équivaut à : un carré plus deux est égal à trois racines.

Démonstration. Supposons un cube ABCDE (fig. 12), lequel, ajouté à deux de ses racines, soit égal à trois carrés. Supposons de plus un carré H égal à CB, et une droite K égale à trois. Le produit de H en K sera alors égal à trois carrés du cube AE. Construisons sur AC un rectangle égal à deux, et complétons

*) XI, $x^3 + bx = cx^2$ ($x^3 + 2x = 3x^2$).
Démonstr. : cube ABCDE $= x^3$, H $=$ CB $= x^2$, K $= 3$, H.K $= 3x^2$; AL $= 2$, AT $= 2x$;
BT $=$ ZB.$\overline{AC}^2 =$ ZB.x^2; BT $=$ AE $+$ AT $= x^3 + 2x = 3x^2$; donc ZB $= 3$;
BL $=$ BC $+$ AL $= x^2 + 2$; BL $=$ ZB.AB $= 3x$; donc $x^2 + 2 = 3x$.

le solide AZCTD; il sera égal au nombre de racines. Mais lorsqu'on multiplie la ligne ZB par le carré de AC, il résulte le solide BT, et le solide AT est égal au nombre de côtés; conséquemment, le solide BT sera égal au cube plus une quantité égale au nombre de ses côtés. Le solide BT sera donc égal au nombre de carrés. Il en suit, d'une manière analogue à ce qui a été expliqué dans le théorème précédent (*), que la ligne ZB est égale à trois. En même temps le rectangle BL est égal à un carré et deux. Conséquemment, un carré et deux sera égal à trois racines, parce que le rectangle BL est formé par le produit de AB en trois. Mais c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Troisième espèce. « UN CUBE EST ÉGAL A UN CARRÉ ET TROIS RACINES (**). » Cela équivaut à : un carré est égal à une racine et trois en nombre.

Supposons un cube ABCDE (fig. 13) égal à son carré, plus trois de ses côtés. Retranchons de la ligne AB, qui est le côté du cube, la ligne AZ égale au nombre des carrés, lequel est 17
un, et complétons le solide AZTHC. Alors ce solide AZTHC sera égal au nombre donné de carrés. Il reste donc le solide ZE égal au nombre donné de côtés; et l'un des deux solides sera à l'autre comme la base ZC à la base ZL, ainsi que c'est démontré dans le onzième livre des Éléments (***), puisque leurs hauteurs sont égales. Mais le rectangle ZC est égal à

---

*) C'est-à-dire, les deux solides $ZB.\overline{AC}^2$ et $3x^2$ étant égaux, leurs bases doivent être réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; or, leurs bases étant égales ($\overline{AC}^2 = x^2$), leurs hauteurs seront égales, ZB = 3. Dans le théorème précédent les hauteurs étaient égales, et on en déduisait l'égalité des bases.

**) XIII, $cx^2 + bx = x^3$ ($x^3 = 1.x^2 + 3x$).

Démonstr. : cube ABCDE $= x^3 = 1 . x^2 + 3x$; AZ $= c = 1$, TC $= 1 . x^2$;
TL $=$ AE $-$ TC $= x^3 - 1.x^2 = 3x$; ZC $=$ AZ.AC $= 1.x$;
TL : TC $=$ ZL ; ZC ou $3x : x^2 =$ ZL : x, donc ZL $= 3$;
CB $=$ ZC $+$ ZL ou $x^2 = 1.x + 3$.

***) Euclide, Éléments, XI, 32.

une fois la racine du carré CB, et le rectangle ZL est le nombre des racines, à savoir, trois. Conséquemment, le carré CB sera égal à une racine plus trois en nombre, et c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

Tant que ces démonstrations (des équations 10, 11, 12) ne sont pas entendues de cette manière (géométrique; tandis qu'auparavant on ne les avait envisagées que du point de vue purement arithmétique, voir pg. 11, lg. 10), l'art de l'algèbre n'est pas véritablement scientifique, bien que cette méthode de démonstration exige qu'on aborde quelques difficultés.

Or, après avoir traité précédemment ces espèces d'équations qui peuvent être démontrées au moyen des propriétés du cercle, c'est-à-dire au moyen de l'ouvrage d'Euclide, occupons-nous à présent de la discussion de celles dont la démonstration ne peut être donnée qu'au moyen des propriétés des sections coniques. Ces dernières espèces sont au nombre de quatorze, comprenant 1° une équation simple, à savoir l'équation : « un nombre est égal à un cube; » 2° six équations trinômes qui restent (encore à être discutées, des douze équations trinômes proposées dans le tableau général des équations algébriques); 3° sept équations quadrinômes.

Faisons précéder cette discussion par quelques propositions fondées sur l'ouvrage des Coniques (*), afin d'offrir à l'étudiant un arrangement systématique, et afin que dans ce Traité nous n'ayons à renvoyer à plus des trois ouvrages mentionnés, à savoir, les deux ouvrages d'Euclide sur les Éléments et sur les Données, et les deux (premiers) livres du traité des Coniques.

Trouver deux lignes entre deux autres lignes (données),

---

*) Ceci ne s'applique qu'au premier des trois théorèmes préliminaires qui suivent.

de manière que ces quatre lignes soient en proportion continue (*).

Que les deux droites (données) soient AB, BC (fig. 14), et 18
plaçons-les de manière qu'elles renferment l'angle droit B. Construisons une parabole dont le sommet soit situé au point B, dont l'axe soit BC, et dont le paramètre soit BC. Que ce soit la conique BDE. Elle sera connue de position, parce que son sommet et son axe sont connus de position, et que son paramètre est connu de grandeur. Elle touchera la ligne BA, parce que l'angle B est un angle droit, et conséquemment égal à l'angle de l'ordination, ainsi que cela est démontré dans la trente-troisième proposition du premier livre des Coniques (**). D'une manière semblable nous construisons une autre parabole ayant pour sommet le point B, pour axe AB, et pour paramètre AB, laquelle sera la conique BDZ, ainsi que cela est démontré par Apollonius dans la cinquante-sixième proposition du premier livre (***). La conique BDZ touchera la ligne BC. Les deux paraboles s'entrecoupent donc nécessairement. Que D soit leur point d'intersection. Alors le point D sera connu de position, parce que les deux coniques sont connues de position. Abaissons du point D deux perpendiculaires DH, DT, sur AB, BC. Elles seront connues de grandeur, ainsi que cela est démontré dans les Données (****). Et je dis qu'alors les

---

*) AB : $x = x : y = y$: BC.

Construction : B sommet, BC axe, BC paramètre de la parabole BDE;
B sommet, BA axe, AB paramètre de la parabole BDZ;

Parab. BDE ... $\overline{HD}^2 = BH \cdot BC$, HD = BT, donc BC : BT = BT : HB

Parab. BDZ ... $\overline{DT}^2 = BA \cdot BT$, DT = HB, donc BT : HB = HB : BA

conséquemment AB : BH = BH : BT = BT : BC

$x = BH$, $y = BT$

C'est la seconde des deux constructions de ce problème attribuées à *Ménechme*. Voir *Archimède*, éd. d'Oxford, pg. 142.

**) Voir l'édition d'Oxford, 1710, fol., p. 57. La proposition à laquelle l'auteur fait allusion y est la trente-deuxième.

***) Édit. d'Oxford, livre I, prop. 52.

****) Voir propp. 30, 25, 26.

quatre lignes AB, BH, BT, BC, sont en proportion continue.

Démonstration. Le carré de HD est égal au produit de BH en BC, parce que la ligne DH est ordonnée de la parabole BDE; conséquemment BC est à HD, laquelle est égale à BT, comme BT à HB. La ligne DT est ordonnée de la parabole BDZ. Le carré de DT, laquelle est égale à BH, sera donc égal au produit de BA en BT. Conséquemment BT sera à BH comme BH à BA. Les quatre lignes sont donc en proportion continue; et la ligne DH est connue de grandeur, vu qu'elle est menée d'un point connu de position à une ligne connue de position, sous un angle connu de grandeur; et semblablement DT sera connue de grandeur. Il suit donc que les deux lignes BH, BT, sont connues de grandeur, et qu'elles sont en même temps moyennes proportionnelles entre les deux lignes AB, BC, c'est-à-dire que AB est à BH comme BH à BT, et comme BT à BC. Mais c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

19 *Étant donnés le carré ABCD* (fig. 15,1), *base du parallélipipède rectangle ABCDE, et le carré MH, construire sur MH comme base un parallélipipède rectangle égal au solide donné ABCDE* (*).

Faisons AB à MZ comme MZ à K, et puis AB à K comme ZT à ED. Plaçons ZT de manière qu'elle soit perpendiculaire au plan MH au point Z, et complétons le solide MZTH. Je dis que ce solide est égal au solide donné.

Démonstration. Le carré AC est au carré MH comme AB à K. Le carré AC sera donc au carré MH comme ZT, la hau-

---

*) On détermine K et ZT au moyen des deux proportions

1) AB : MZ = MZ : K

2) AB : K = ZT : ED

il suit $\overline{AB}^2 : \overline{MZ}^2 = ZT : ED$, donc $\overline{AB}^2 . ED = \overline{MZ}^2 . ZT$

ou, solide BE = solide MTH.

teur du solide MTH, à ED la hauteur du solide BE. Il suit que les deux solides sont égaux, puisque leurs bases sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, ainsi que c'est démontré dans le onzième livre des Éléments (*).

Toutes les fois que nous nous servirons de l'expression « solide, » nous désignerons par cela un parallélipipède rectangle; et de même, toutes les fois que nous nous servirons de l'expression « figure plane », nous voudrons parler d'un rectangle.

Étant donné un solide ABCD (fig. 15, 2) *dont la base AC est carrée, construire un solide dont la base soit un carré, la hauteur égale à la ligne donnée ET, et lequel soit égal au solide donné ACD* (**).

Faisons ET à BD comme AB à K, et prenons entre AB et K une moyenne proportionnelle EZ. Faisons EZ perpendiculaire à ET, et complétons TZ. Puis faisons EH perpendiculaire au plan TZ et égale à EZ, et complétons le solide HETZ. Je dis que le solide T, ayant pour base le carré HZ et pour hauteur la ligne donnée ET, est égal au solide donné D.

Démonstration. Le carré AC est au carré HZ comme AB 20
à K; conséquemment le carré AC sera au carré HZ comme ET à BD. Les bases des deux solides étant ainsi réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, les solides seront égaux. Et c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Ces préliminaires établis, nous pouvons donner la résolution de la *troisième espèce des équations simples*,

---

*) Prop. 34.

**) On détermine K et EZ au moyen des deux proportions

1) ET : BD = AB : K

2) AB : EZ = EZ : K

il suit $\overline{AB}^2 : \overline{EZ}^2 = ET : BD$, donc $\overline{AB}^2 . BD = \overline{EZ}^2 . ET$

ou solide D = solide T.

laquelle était : « UN CUBE EST ÉGAL A UN NOMBRE (*). »

Représentons le nombre par le solide ABCD (fig. 16), dont la base AC soit le carré de l'unité, comme nous l'avons expliqué précédemment (**), tandis que sa hauteur soit égale au nombre donné. Nous désirons construire un cube égal à ce solide. Prenons, entre les deux lignes AB, BD, deux moyennes proportionnelles : celles-ci seront connues de grandeur, comme nous venons de le démontrer (***). Que ce soient les lignes E, Z. Faisons HT égale à la ligne E, et décrivons sur HT le cube THKL. Ce cube et son côté seront connus de grandeur, et je dis que ce cube est égal au solide D.

Démonstration. Le carré AC est au carré TK en raison double de AB à HK, et la raison double de AB à HK est égale à la raison de AB à Z, de la première à la troisième des quatre lignes, et conséquemment égale à la raison de la seconde HK à la quatrième BD. Les bases (TK, AC) du cube L et du solide D sont donc réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs (HL = HK et BD). Il suit de là que ces deux solides sont égaux, et c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Après cela, occupons-nous des six équations trinômes qui restent à être discutées.

Première espèce. « UN CUBE ET DES CÔTÉS SONT ÉGAUX A UN NOMBRE (****). » Faisons la ligne AB (fig. 17) égale au côté

---

*) III, $a = x^3$.
Faisons AB = BC = 1, BD = a;
déterminons deux lignes E, Z en sorte que AB : E = E : Z = Z : BD;
il suit $\overline{AB}^2 : \overline{E}^2 = AB : Z = E : BD$,
donc $\overline{E}^3 = \overline{AB}^2 . BD = 1.a = a$
ou, en faisant HT = E, $a = \overline{HT}^3 \ldots x = HT$.

**) Pg. 15.

***) Pg. 28 ult. sqq.

****) XIII, $x^3 + bx = a$. $\overline{AB}^2 = b$, $\overline{AB}^2 . BC = a$.
B sommet, BZ axe, AB paramètre de la parabole HBD.
BC diamètre du cercle CDB.

d'un carré égal au nombre des racines, lequel côté sera donné. Construisons ensuite un solide dont la base soit égale au carré de AB, dont la hauteur soit égale à BC, et lequel soit égal au nombre donné, construction que nous avons enseignée dans ce qui précède (*), et faisons BC perpendiculaire à AB. On sait d'ailleurs (**) ce qu'il faut en- 21
tendre dans notre traité par le nombre solide : c'est un solide dont la base est le caré de l'unité, et dont la hauteur est égale au nombre donné, c'est-à-dire à une ligne dont le rapport au côté de la base du solide est égal au rapport du nombre donné à l'unité. Prolongeons AB jusqu'à Z, et construisons une parabole dont le sommet soit B, l'axe BZ, et le paramètre AB; ce sera la conique HBD. Elle sera connue de position, comme nous l'avons expliqué dès la première de ces constructions (***), et touchera la ligne BC. Décrivons sur BC un demi-cercle: il coupera nécessairement la conique. Que le point d'intersection soit D. Abaissons de D, qui, comme on sait, sera connu de position, deux perpendiculaires DZ, DE, sur BZ, BC. Elles seront connues de position et de grandeur. La ligne DZ étant ordonnée de la conique, son carré sera égal au produit de BZ en AB; conséquemment AB sera à DZ, qui est égale à BE, comme BE à ED, qui est égale à ZB. Mais BE est à ED comme ED à EC. Les quatre lignes suivantes sont donc en proportion continue AB, BE, ED, EC; et conséquemment le carré de la première AB est au carré de la seconde BE

Parab. : $\overline{DZ}^2 = AB.BZ$, $DZ = BE$, $BZ = DE$... $AB : BE = BE : DE$

Cercle : $BE : DE = DE : EC$

$\therefore \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 = BE : EC$, $\overline{BE}^3 = \overline{AB}^2 . EC$

$\overline{BE}^3 + \overline{AB}^2 . EB = \overline{AB}^2 . EC + \overline{AB}^2 . EB = \overline{AB}^2 . B$ ou $\overline{BE}^3 + b . BE = a$, $x = BE$.

*) Voir pag. 30.

**) Voir pag. 15.

***) Voir pag. 29.

comme la seconde BE à la quatrième EC. Il suit de là que le solide dont la base est le carré de AB, et la hauteur EC, est égal au cube de BE, puisque leurs hauteurs sont réciproquement proportionnelles à leurs bases. Ajoutons à tous les deux le solide, dont la base est le carré de AB, et la hauteur EB. Le cube de BE, plus ce solide, sera égal au solide, dont la base est le carré de AB, et la hauteur BC, lequel solide nous avons posé égal au nombre donné. Mais le solide dont la base est le carré de AB, qui est égal au nombre des racines, et la hauteur EB, qui est le côté du cube, sera égal au nombre donné de côtés du cube de EB. Conséquemment le cube de EB, plus le nombre donné de côtés du même, est égal au nombre donné; et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Cette espèce ne présente ni variété de cas, ni problèmes impossibles (*). Elle a été résolue au moyen des propriétés du cercle combinées avec celles de la parabole.

Seconde espèce des six équations trinômes. « UN CUBE ET
22 UN NOMBRE SONT ÉGAUX A DES CÔTÉS (**). » Faisons la ligne AB (fig. 18) égale au côté d'un carré égal au nombre des racines, et construisons un solide ayant pour base le carré de AB, et égal au nombre donné. Que la hauteur de ce solide soit BC, et placée perpendiculairement à AB. Décrivons une parabole dont le sommet soit situé au point B, et l'axe dans la direction de AB, et dont le paramètre soit AB. Ce sera la courbe DBE,

---

*) L'équation $x^3 + bx - a = 0$ n'admet qu'une seule racine réelle, laquelle est toujours positive.

**) XIV, $x^3 + a = bx$. $\overline{AB}^2 = b$, $\overline{AB}^2 . BC = a$.
B sommet, BH axe, AB paramètre de la parabole DBE.
C sommet, CT axe, BC paramètre de l'hyperbole équilatère ECZ.

Hyperb. : $\overline{ET}^2 = BT.CT...$ $BT : ET = ET : TC$

Parab. : $\overline{EH}^2 = BH.AB$, $EH = BT$, $BH = ET$...$AB : BT = BT : ET$

$\overline{AB}^2 : \overline{BT}^2 = BT : TC$, $\overline{BT}^3 = \overline{AB}^2 . TC$

$\overline{BT}^3 + \overline{AB}^2 . BC = \overline{AB}^2 . TC + \overline{AB}^2 . BC = \overline{AB}^2 . BT$ ou $\overline{BT}^3 + a = b . BT$, $x = BT$.

connue de position. Puis construisons une seconde conique, à savoir une hyperbole, dont le sommet soit situé au point C, et l'axe dans la direction de BC, et dont le paramètre et le grand axe soient tous les deux égaux à BC; que ce soit la courbe ECZ. Cette hyperbole sera connue de position, ainsi qu'il est démontré par Apollonius dans la cinquante-huitième proposition du premier livre (*). Les deux coniques se rencontrent ou ne se rencontrent pas. Si elles ne se rencontrent pas, le problème est impossible. Mais si elles se rencontrent, soit par contact en un point, soit par intersection en deux points, le point de rencontre sera connu de position. Que les deux coniques aient une intersection au point E : abaissons de E deux perpendiculaires ET, EH, sur les deux lignes BT, BH. Les deux perpendiculaires sont infailliblement connues de position et de grandeur. La ligne ET est ordonnée (de l'hyperbole); conséquemment le carré de ET sera au produit de BT en TC comme le paramètre au grand axe, comme cela est démontré par Apollonius dans la vingtième proposition du premier livre (**). Mais le paramètre et le grand axe sont égaux; le carré de ET sera donc égal au produit de BT en TC. Il suit de là que BT est à TE comme TE à TC. D'un autre côté, le carré de EH, qui est égal à BT, est égal au produit de BH en BA, comme cela se trouve démontré dans la douzième proposition du premier livre du Traité des Coniques (***); conséquemment AB est à BT comme BT à BH, et comme BH, qui est égale à ET, à TC. Les quatre lignes sont

*) Éd. d'Oxf. p. 89, Prop. 53. — Les deux Mss. portent bien tous les deux  , tandis que 53 aurait été écrit  ; semblablement la 52e prop. était citée par l'auteur comme la 56e. (Voir pag. 29.) Il semble donc que l'auteur avait sous les yeux une rédaction des Coniques un peu différente de la nôtre.

**) Éd. d'Oxf. p. 46, Prop. 21.

***) Éd. d'Oxf. p. 31, Prop. 11.

donc en proportion continue, et le carré de la première AB sera au carré de la seconde BT comme la seconde BT à la quatrième TC. Il suit de là que le cube de BT est égal au solide dont la base est le carré de AB, et la hauteur CT. Ajoutons à tous les deux le solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BC, lequel nous avons fait égal au nombre donné. Alors le
23 cube de BT, plus le nombre donné, sera égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BT, lequel représente le nombre de côtés du cube.

Il est évident que cette espèce comprend différents cas, et que certains, parmi les problèmes qui dépendent de cette espèce, sont impossibles (*). Elle a été résolue au moyen des propriétés de deux coniques, d'une parabole et d'une hyperbole.

Troisième espèce. « UN CUBE EST ÉGAL A DES CÔTÉS, PLUS UN NOMBRE (**). » Faisons la ligne AB (fig. 19) égale au côté d'un carré égal au nombre des côtés, et construisons un solide ayant pour base le carré de AB, et égal au nombre donné. Que la hauteur de ce solide soit BC, et qu'elle soit perpendiculaire à AB. Puis prolongeons AB et BC, et décrivons une parabole dont le sommet soit situé au point B, l'axe sur le prolongement de AB, et dont le paramètre soit AB. Que cette pa-

---

*) L'équation $x^3 - bx + a = 0$ a toujours une racine réelle et négative, dont l'algébriste arabe ne tient pas compte; les deux autres racines sont, ou imaginaires (et en ce cas le problème est « impossible »), ou positives et égales $\left(x = \sqrt{\frac{b}{3}}\right)$, ou positives et inégales — ce qui constitue la variété de cas mentionnée par l'auteur.

**) XV, $bx + a = x^3$. $\overline{AB}^2 = b$, $\overline{AB}^2 . BC = a$.

B sommet, BT axe, AB paramètre de la parabole DBE.

B sommet, BH axe, BC paramètre de l'hyperbole équilatère ZBE.

Hyperb. : $\overline{EH}^2 = CH . BH$, $EH = BT$... $\quad BH : BT = BT : CH$

Parab. : $\overline{ET}^2 = AB . BT$, $ET = BH$... $\quad AB : BH = BH : BT$

$\overline{AB}^2 : \overline{BH}^2 = BH : CH$

$\overline{BH}^3 = \overline{AB}^2 . CH = \overline{AB}^2 . BH + \overline{AB}^2 . BC$ ou $\overline{BH}^3 = b . BH + a$, $x = BH$.

rabole soit DBE; elle sera connue de position, et touchera la ligne BH, conformément à ce qui est démontré par Apollonius dans la trente-troisième proposition du premier livre (*). Puis décrivons une seconde conique, une hyperbole dont le sommet soit situé au point B, l'axe sur le prolongement de BC, et dont le paramètre et le grand axe soient tous les deux égaux à BC. Que ce soit l'hyperbole ZBE. Elle sera connue de position, et touchera la ligne AB. Les deux coniques s'entrecouperont nécessairement. Que leur intersection ait lieu au point E. Ce point sera alors connu de position. Abaissons du point E deux perpendiculaires ET, EH. Elles seront connues de position et de grandeur. La ligne EH sera ordonnée (de l'hyperbole), et, conformément à ce que nous avons expliqué ci-dessus (**), son carré sera égal au produit de CH en BH. Conséquemment CH sera à EH comme EH à HB. Mais EH, qui est égale à BT, est à HB — qui est égale à ET, qui de son côté est ordonnée de l'autre conique—comme ET à AB qui est le paramètre de la parabole. Les quatre lignes sont donc en proportion continue: AB est à HB comme HB à BT, et comme BT à CH; et le carré de la première AB sera au carré de la seconde HB comme la seconde HB à la quatrième CH. Conséquemment, le cube de HB sera égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur CH, parce que leurs hauteurs sont réciproquement proportionnelles à leurs bases. Mais ce dernier solide est égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BC, lequel nous avons 24
fait égal au nombre donné; plus le solide contenu sous une base égale au carré de AB et sous la hauteur BH, lequel solide est égal au nombre donné de côtés du cube de BH. Le cube

*) Voir pag. 29.
**) Voir pag. 35.

de BH est donc égal au nombre donné, plus le nombre donné de ses côtés, et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Il est évident que cette espèce n'admet pas une variété de cas, et que cette espèce, c'est-à-dire que les problèmes qui en dépendent, ne renferment rien d'impossible (*). Elle a été résolue par les propriétés d'une parabole combinées avec celles d'une hyperbole.

Quatrième espèce des six espèces d'équations trinômes. « UN CUBE ET DES CARRÉS SONT ÉGAUX A UN NOMBRE (**). » Représentons le nombre des carrés par la ligne AB (fig. 20), et construisons un cube égal au nombre donné. Que le côté de ce cube soit H. Prolongeons AB en ligne droite, et faisons BT égale à H. Complétons le carré BTDC, et faisons passer par le point D une hyperbole ayant pour asymptotes BC et BT, à savoir l'hyperbole EDN, ainsi que cela est connu en vertu des propositions quatrième et cinquième du second livre, et de la cinquante-neuvième proposition du premier livre (***). La conique EDN sera connue de position, parce que le point D est connu de position, et que les deux lignes BC, BT, sont connues de position. Décrivons ensuite une parabole ayant pour sommet A, pour axe AT, et pour paramètre BC. Que ce soit la conique AK ; elle sera connue de position. Les deux coniques s'entrecouperont nécessairement. Que le point d'intersection

---

*) Une des racines de l'équation $x^3 - bx - a = 0$ est toujours réelle et positive; les deux autres sont toujours ou négatives ou imaginaires, et en aucun de ces cas l'algébriste arabe n'en tient compte.

**) XVI, $x^3 + cx^2 = a$. $AB = c$, $\overline{H}^3 = a$, $H = BC = BT$.
BC, BT asymptotes de l'hyperbole équilatère EDN, qui passe par le point D.
A sommet, AT axe, BC paramètre de la parabole AEK.
Parabole ... $BC : EZ = EZ : AZ$
Hyperbole ... $BZ : BC = BC : EZ$
$\overline{BZ}^2 : \overline{BC}^2 = BC : AZ$
$\overline{BC}^3 = \overline{BZ}^2 . AZ = \overline{BZ}^3 + \overline{BZ}^2 . AB$ ou $a = \overline{BZ}^3 + c . \overline{BZ}^2$, $x = BZ$.

***) Voir éd. d'Oxf. II, 4, p. 109.

soit E. Alors E sera connu de position. Abaissons de ce point les deux perpendiculaires EZ, EL, sur les deux lignes AT, BC. Elles seront connues de position et de grandeur. Maintenant, je dis qu'il est impossible que la conique AEK coupe la conique EDN dans un point tel, que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la ligne AT tombe sur T ou au delà de T (*). Car supposons qu'elle tombe sur T, s'il est possible; alors son carré sera égal au produit de AT en TB, qui est égal à BC; mais cette perpendiculaire est égale à la perpendiculaire DT; donc le carré de TD sera égal au produit de AT en TB; mais, d'un autre côté, le carré de TD serait égal au produit de BT en lui-même, ce qui est absurde; en sorte que la perpendiculaire ne peut pas tomber sur T. Et de même elle ne peut pas tomber au delà de T, puisqu'alors cette perpendiculaire serait plus petite que TD, et que l'absurde aurait lieu à plus forte raison. La perpendiculaire tombe donc nécessairement sur un point situé entre A et T, ainsi que le fait EZ.

Le carré de EZ est égal au produit de AZ en BC, donc AZ à EZ comme EZ à BC; et le rectangle EB est égal au rectangle DB, comme il est démontré dans la huitième proposition du second livre des Coniques (**); donc EZ à BC comme BC à BZ. Il suit que les quatre lignes AZ, EZ, BC, BZ, sont en proportion continue. Conséquemment, le carré de la quatrième BZ est au carré

---

*) Le point d'intersection des deux coniques ne peut être ni D, ni un point de la partie DN de l'hyperbole. 1° Si c'était D, on aurait dans la parabole $\overline{DT}^2 = AT \cdot BC$; mais $BC = DT = BT$; donc $\overline{BT}^2 = AT \cdot BT$ ou $BT = AT = AB + BT$, ce qui est absurde. 2° Si c'était un point de la partie DN de l'hyperbole tel que P, en abaissant la perpendiculaire PQ, on aurait $PQ < DT$, donc $\overline{PQ}^2 < \overline{DT}^2$; et puis $\overline{PQ}^2 = AQ \cdot BC$, donc $\overline{DT}^2 > AQ \cdot BC$, ou $\overline{BT}^2 > AQ \cdot BT$, ou $BT > AQ$, c'est-à-dire $BT > AB + BT + TQ$, ce qui est absurde. — La même chose peut être démontrée immédiatement comme suit : Puisque a, c, x sont considérés par l'algébriste arabe comme des quantités positives, de l'équation $x^3 + cx^2 = a$ il suit $x = \sqrt[3]{a - cx^2} < \sqrt[3]{a}$; donc, puisque x est représenté par BZ, et $\sqrt[3]{a}$ par BT, $BZ < BT$; c. q. f. d.

**) Éd. d'Oxf., p. 114, Prop. 12.

de la troisième BC comme la troisième BC à la première AZ. Le cube de BC, que nous avons fait égal au nombre donné, sera donc égal au solide, dont la base est le carré de BZ et la hauteur AZ. Mais ce solide, qui a pour base le carré de BZ et pour hauteur AZ, est égal au cube de BZ, plus le solide dont la base est le carré de BZ et la hauteur AB. Cependant, ce solide, ayant pour base le carré de BZ et pour hauteur AB, est égal au nombre donné de carrés. En sorte que le cube de BZ, plus le nombre donné de carrés du même, est égal au nombre donné; et c'est ce que nous nous proposions de montrer.

Cette espèce ne comprend ni variété de cas ni problèmes impossibles (*). Elle a été résolue au moyen des propriétés de la parabole combinées avec celles de l'hyperbole.

Cinquième espèce des six espèces d'équations trinômes qui restaient à être discutées. « UN CUBE ET UN NOMBRE SONT ÉGAUX A DES CARRÉS (**). »

Représentons par la ligne AC (fig. 21) le nombre des carrés, et décrivons un cube égal au nombre donné. Que le côté de ce

---

*) L'équation $x^3+cx^2-a=0$ a toujours une racine réelle et positive, tandis que ses deux autres racines sont négatives ou imaginaires, et conséquemment négligées par l'algébriste arabe.

**) XVII, $x^3+a=cx^2$. $AC=c$, $\overline{H}^3=a$.

a, c, x sont considérés comme des quantités positives.

$H \gtrless AC$. I, $H=AC\ldots$ $x \lessgtr H$

1) $x=H\ldots$ $AC.x^2=\overline{H}^3$ ou $cx^2=a$, donc $cx^2<a+x^3$

2) $x<H\ldots$ $AC.x^2<\overline{H}^3$ ou $cx^2<a$, donc $cx^2<a+x^3$

3) $x>H\ldots$ $x^3>AC.x^2$ ou $x^3>cx^2$, donc $x^3+a>cx^2$.

II, $H>AC\ldots$ impossible par des raisons tout à fait analogues.

III, $H<AC$, $BC=H\ldots BC \gtrless AB$ ou $\sqrt[3]{a} \gtrless \frac{c}{2}$; carré $BCDE=\overline{H}^2=a^{\frac{2}{3}}$.

CA, CE asymptotes de l'hyperbole équilatère DZ (fig. 21, 1), DT (fig. 21, 2, 3), qui passe par le point D.

A sommet, AC axe, BC paramètre de la parabole AT (fig. 21, 1), AL (fig. 21, 2), AK (fig. 21, 3).

cube soit H. La ligne H ne pourra qu'être ou égale à la ligne AC, ou plus grande que AC, ou plus petite. Si H est égale à AC, le problème est impossible, parce qu'alors le côté du cube cherché sera nécessairement ou égal à H, ou plus petit, ou plus grand que H. Or, si le côté du cube cherché est égal à H, le produit du carré de ce côté en AC sera égal au cube de H, en sorte que le nombre sera égal au nombre de carrés, sans qu'on ait besoin d'ajouter à celui-là le cube (cherché). Si le côté du (cube) cher- 26
ché est plus petit que H, le produit du carré de ce côté en AC sera plus petit que le nombre donné, en sorte que le nombre de car-

---

1) BC = AB (fig. 21, 1)... $\overline{BD}^2 = AB.BC$; donc D un point situé sur la circonférence de la parabole; l'autre point dont parle l'auteur aura pour abscisse (en prenant C pour origine) $x = \frac{1}{4} c \left\{\sqrt{5}+1\right\}$ et pour ordonnée $y = \frac{1}{4} c \left\{\sqrt{5}-1\right\}$.

2) BC > AB (fig. 21, 2)... $\overline{BD}^2 > AB.BC$; d'où il suit que la parabole passe en deçà du point D. — L'auteur dit encore que lorsque $\sqrt{a} > \frac{1}{2} c$, x doit être compris entre c et $\sqrt[3]{a}$; de l'équation proposée $x^3 + a = cx^2$ il suit immédiatement $cx^2 > x^3$ ou $x < c$; il reste donc à prouver que $x > \sqrt[3]{a}$. Observons d'abord qu'il ne pourra être question d'une rencontre des deux sections coniques que tant que $\sqrt[3]{a} < \frac{2}{3} c$, parce que de $\sqrt[3]{a} \geqq \frac{2}{3} c$ il suit $27\, a \geqq 8\, c^3 > 4\, c^3$, ce qui rendrait l'intersection imaginaire. Or on a $\frac{d(cx^2 - x^3)}{dx} = 3x \left\{\frac{2}{3} c - x\right\}$, d'où il suit que, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{2}{3} c$, $cx^2 - x^3$ décroîtra avec x. Pour $x = \sqrt[3]{a}$, puisque en même temps $c < 2\sqrt[3]{a}$, on trouve $cx^2 - x^3 < a$; donc pour toutes les valeurs de x plus petites que $\sqrt[3]{a}$, $cx^2 - x^3 < a$, ce qu'il s'agissait de prouver. — Le cas du contact donne deux racines égales et positives $x = \frac{2}{3} c$.

3) BC < AB (fig. 21, 3)... $\overline{BD} < AB.BC$; la parabole passe au delà du point D, et rencontre nécessairement l'hyperbole en deux points; ce qui suit aussi de ce que de $\sqrt[3]{a} < \frac{1}{2} c$ on tire $4c^3 > 32\, a > 27\, a$.

rés sera plus petit que le nombre donné, sans qu'on ajoute encore quelque chose à ce dernier. Enfin, si le côté cherché est plus grand que H, le cube de ce côté sera plus grand que le produit de son carré en AC, sans qu'on ajoute encore le nombre à ce cube.

Puis si H est plus grande que AC, l'impossibilité a lieu dans les trois cas à plus forte raison. Il est donc nécessaire que H soit plus petite que AC; sinon, le problème sera impossible.

Retranchons donc de AC la partie BC égale à H. La ligne BC sera ou égale à AB, ou plus grande que AB, ou plus petite. Qu'elle soit dans la première figure (fig. 21, 1) égale; dans la seconde (fig. 21, 2), plus grande; et dans la troisième (fig. 21, 3), plus petite. Complétons dans les trois figures le carré DC, et faisons passer par le point D une hyperbole ayant pour asymptotes les lignes AC, CE. Ce sera dans la première figure la courbe DZ, dans la seconde et dans la troisième DT. Décrivons ensuite une parabole dont le sommet soit situé au point A, dont l'axe soit AC et le paramètre BC. Ce sera dans la première figure AT, dans la seconde AL, et dans la troisième AK. Les deux coniques seront connues de position. Dans la première figure, la parabole passera par le point D, parce que le carré de DB est égal au produit de AB en BC, d'où il suit que D est situé sur la circonférence de la parabole. Celle-ci rencontrera (l'hyperbole) encore dans un autre point, ce qu'on peut reconnaître par la moindre réflexion. Dans la seconde figure, le point D sera situé en dehors de la circonférence de la parabole, parce que le carré de DB y sera plus grand que le produit de AB en BC; alors, si les deux coniques se rencontrent dans un autre point par contact ou par intersection, auquel cas la perpendiculaire abaissée de ce point (sur AC) tombe infailliblement sur le segment compris entre les deux points A et B, le problème est possible; sinon, il est

impossible. Ce contact, ou cette intersection, ont échappé à l'excellent géomètre Aboûl Djoûd (*), en sorte qu'il déclara que si BC est plus grande que AB, le problème est impossible; en quoi il s'est trompé. Cette espèce est aussi celle parmi les six espèces dont avait besoin Almâhânî; de sorte qu'elle est connue. Dans la troisième figure, le point D est situé dans 27
l'intérieur de la parabole, en sorte que les deux coniques se coupent en deux points.

Dans tous les cas (**), abaissons du point de rencontre une perpendiculaire sur AB. Que ce soit dans la seconde figure TZ. De même, abaissons de ce point une seconde perpendiculaire sur CE; ce sera TK. Le rectangle TC sera égal au rectangle DC, et conséquemment ZC sera à BC comme BC à TZ. Or, TZ est ordonnée de la conique ATL, d'où il suit que son carré est égal au produit de AZ en BC; donc BC à TZ comme TZ à ZA. Il en résulte que les quatre lignes sont en proportion continue, à savoir : ZC à CB comme CB à TZ, et comme TZ à ZA. Le carré de la première ZC sera donc au carré de la seconde BC comme la seconde BC à la quatrième ZA; et conséquemment le cube de BC, qui est égal au nombre donné, sera égal au solide dont la base est le carré de ZC et la hauteur ZA. Ajoutons à tous les deux le cube de ZC. Alors le cube de ZC, plus le nombre donné, sera égal au solide dont la base est le carré de ZC et la hauteur AC, lequel solide est égal au nombre donné de carrés; et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir. On discutera d'une manière analogue les deux autres cas, en

---

*) Ce géomètre était contemporain d'Albîrouni. Voir l'addition D, premier problème.

**) Hyperbole : $ZC : BC = BC : TZ$

Parabole : $BC : TZ = TZ : ZA$

$\overline{ZC}^2 : \overline{BC}^2 = BC : ZA$, $\overline{BC}^3 = \overline{ZC}^2 . ZA$

$\overline{ZC}^3 + \overline{BC}^3 = \overline{ZC}^3 + \overline{ZC}^2 . ZA = \overline{ZC}^2 . AC$ ou $\overline{ZC}^3 + a = c . \overline{ZC}^2$, $x = ZC$.

observant que le troisième donnera nécessairement deux cubes comme solution du problème, parce que chacune des (deux) perpendiculaires (abaissées des deux points de rencontre que les deux coniques ont en ce cas) coupera de CA un côté d'un cube (qui satisfait à l'équation proposée), ainsi qu'on vient de le démontrer.

Il résulte de ce qui précède que cette espèce comprend une variété de cas, et qu'elle renferme des problèmes impossibles (*). Elle a été résolue au moyen des propriétés de deux sections coniques combinées d'une parabole et d'une hyperbole.

Sixième espèce des six espèces d'équations trinômes qui restaient à être discutées : « UN CUBE EST ÉGAL A DES CARRÉS, PLUS DES NOMBRES (**). »

Représentons le nombre des carrés par la ligne AB (fig. 22), et construisons un solide ayant pour hauteur AB et pour base un carré, et qui soit égal au nombre donné. Que le côté de sa base soit BC et perpendiculaire à AB. Complétons le rectangle DB, et faisons passer par le point C, qui est connu de position, une hyperbole ayant pour asymptotes les droites AB, AD, à savoir la conique CEZ. Puis décrivons une seconde conique, une parabole ayant son sommet au point B, et son axe sur le prolonge-

---

*) L'équation $x^3 - cx^2 + a = 0$ a toujours une racine réelle et négative, dont l'auteur ne tient donc aucun compte. Les deux autres racines sont positives ou imaginaires. Dès qu'elles ne sont pas positives, le problème est « impossible ». Quant aux différents cas mentionnés par l'auteur, ils ont été distingués dans la note précédente.

**) XVIII, $cx^2 + a = x^3$. $AB = c$, $AB \cdot \overline{BC}^2 = a$.
AB, AD asymptotes de l'hyperbole équilatère CEZ qui passe par le point C.
B sommet, BK axe, AB paramètre de la parabole BEH.
Hyperbole : $BC : AK = EK : AB$, $\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{EK}^2 : \overline{AB}^2$
Parabole : $AB : EK = EK : BK$, $\overline{EK}^2 : \overline{AB}^2 = BK : AB$
$\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = BK : AB$, $\overline{AK}^2 \cdot BK = AB \cdot \overline{BC}^2$
$\overline{AK}^2 \cdot AB + \overline{AK}^2 \cdot BK = \overline{AK}^2 \cdot AB + AB \cdot \overline{BC}^2$ ou $\overline{AK}^3 = c \cdot \overline{AK}^2 + a$, $x = AK$

ment de AB, et dont le paramètre soit AB. Ce sera la courbe BEH. Or ces deux coniques s'entrecoupent nécessairement. Que 28
leur point d'intersection soit E. Alors E sera connu de position. Abaissons de ce point deux perpendiculaires ET, EK, sur AB, AD. Le rectangle EA sera égal au rectangle CA, et AK sera à BC comme AB à EK. Les carrés de ces côtés seront donc également proportionnels. Mais le carré de EK est égal au produit de KB en AB, parce que EK est ordonnée de la conique BEH; et conséquemment le carré de AB sera au carré de EK comme AB à BK. Le carré de BC sera donc au carré de AK comme BK à AB; d'où il suit que le solide dont la base est le carré de BC et la hauteur AB, est égal au solide dont la base est le carré de AK et la hauteur KB, à cause de la proportionnalité réciproque des hauteurs et des bases des deux solides. En ajoutant à tous les deux le solide dont la base est le carré de AK et la hauteur AB, le cube de AK sera égal au solide dont la base est le carré de BC et la hauteur AB, que nous avons fait égal au nombre donné; plus le solide dont la base est le carré de AK et la hauteur AB, lequel est égal au nombre donné de carrés. Le cube de AK sera donc égal au nombre donné de carrés du même, plus le nombre donné.

Cette espèce ne renferme ni variété de cas, ni problèmes impossibles (*). Elle a été résolue au moyen des propriétés de deux sections coniques combinées, d'une parabole et d'une hyperbole.

Après avoir ainsi terminé la discussion des équations trinômes, occupons-nous de celle des quatre équations quadrinômes, dont chacune consiste dans une égalité entre trois

*) L'équation $x^3 - cx^2 - a = 0$ admet toujours une racine réelle et positive; les deux autres racines sont toujours imaginaires.

le rectangle BE, faisons passer par le point D une hyperbole ayant pour asymptotes les droites AB, AE, à savoir l'hyperbole ZDH. Décrivons ensuite une seconde hyperbole ayant son sommet au point D et son axe sur le prolongement de BD, et dont le paramètre et le grand axe soient égaux tous les deux à DC. Ce sera la courbe TDH. Cette conique coupera nécessairement la première au point D. Alors s'il est possible que les deux coniques se rencontrent encore dans un autre point, le problème est possible; sinon, il est impossible. Cette rencontre par contact (dans un point) ou par intersection, en deux points, dépend de ce qui est exposé dans le quatrième livre du traité des Coniques. Or, nous avions promis de ne nous en rapporter qu'aux deux (premiers) livres de cet ouvrage. Toutefois ceci ne touche en rien à notre promesse, puisque, pourvu que les deux coniques se rencontrent, il est indifférent que ce soit par contact ou par intersection. Remarquez cela. La rencontre peut donc être un contact ou une intersection; mais si l'une des deux coniques coupe l'autre dans un autre point que D, elle la coupera nécessairement en deux points (outre en D).

Dans tous les cas, abaissons du point de l'intersection ou de la rencontre quelle qu'elle soit, disons du point H, deux perpendiculaires HM, KHL. Elles seront connues de position et de grandeur, puisque le point H est connu de position. Alors le rectangle AH est égal au rectangle AD. Retranchons EM, qui est commun à tous les deux; il reste MD égal à EH; puis ajoutons à l'un et à l'autre de ceux-ci DH; il résulte ML égal à EL; d'où il suit que les côtés, et de même les carrés des côtés, de ces rectangles seront réciproquement proportionnels. Le carré de AB sera donc au carré de BL comme le carré de HL au carré de LD; mais le carré de HL est au carré de LD comme

CL à LD, ainsi que nous l'avons démontré plusieurs fois (*). Conséquemment le carré de AB sera au carré de BL comme CL à LD; d'où il suit que le solide dont la hauteur est LD, et la base le carré de AB, est égal au solide dont la base est le carré de BL et la hauteur LC. Mais ce second solide est égal au cube de BL, plus le solide dont la base est le carré de BL et la hauteur BC, lequel est égal au nombre donné de carrés. Ajoutons de part et d'autre le solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BD, lequel nous avons fait égal au nombre donné. Le cube de BL, plus le nombre donné de carrés du même et plus le nombre donné, sera égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BL, lequel est égal au nombre donné de côtés du cube de BL. Mais c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir. 31

Il est évident que cette espèce admet différents cas: quelquefois on trouvera dans les problèmes qui en dépendent deux côtés correspondant à deux cubes, et quelquefois cette espèce, c'est-à-dire les problèmes qui en dépendent, n'auront pas de solution (**). Elle a été résolue par les propriétés de deux hyperboles. C'est ce que nous nous proposions de démontrer.

Troisième espèce des quatre équations quadrinômes. « UN CUBE, DES CÔTÉS ET DES NOMBRES SONT ÉGAUX A DES CARRÉS (***). »

Représentons le nombre donné des carrés par la ligne BE

---

*) Voir pages 35 et 37.

**) L'équation $x^3 + cx^2 - bx + a = 0$ admet toujours une racine réelle et négative, négligée par l'auteur. Ses deux autres racines sont ou imaginaires (alors le problème est « impossible »), ou positives et égales ($x = -\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}\sqrt{3b + c^2}$ ... contact des deux hyperboles), ou positives et inégales (intersection des hyperboles en deux points, outre D), — ce qui constitue la variété de cas mentionnée par l'auteur.

***) XXI, $x^3 + bx + a = cx^2$. BE $= c$, $\overline{BC}^2 = b$, $\overline{\overleftarrow{BC}}^2$. AB $= a$.
Rectangle HC = rectangle CA. — AE diamètre du cercle AZLNE.
CZ, CM asymptotes de l'hyperbole équilatère LHN qui passe par le point H.

(fig. 25), et faisons BC égale au côté d'un carré égal au nombre des côtés. Que BC soit perpendiculaire à BE; construisons un solide ayant pour base le carré de BC et égal au nombre donné. Que la hauteur AB de ce solide soit placée sur le prolongement de BE. Décrivons sur AE le demi-cercle AZE.

Le point C sera situé, ou dans l'intérieur du cercle, ou sur sa circonférence, ou en dehors du cercle.

Qu'il soit d'abord situé dans l'intérieur du cercle. Prolongeons BC jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle au point Z; complétons le rectangle AC, et construisons sur ZC un rectangle égal au rectangle AC, lequel sera CH. Le point H sera connu de position, parce que le rectangle CH est connu de grandeur, que ses angles sont aussi connus de grandeur, et que la ligne ZC est connue de position et de grandeur.

Ce point H sera à son tour situé, ou dans l'intérieur du cercle, ou sur sa circonférence, ou en dehors du cercle.

Qu'il soit d'abord situé dans l'intérieur du cercle. Faisons passer par le point H une hyperbole ayant pour asymptotes les droites ZC, CM. Dans cette position elle coupera nécessairement le cercle en deux points. Que les deux points d'intersection soient L et N; ils seront connus de position. Abais-
32 sons de ces deux points deux perpendiculaires LK, NF sur AE, et du point L une perpendiculaire LT sur BZ. Le rectangle LC sera égal au rectangle CH, et CH est égal à CA. Ajoutons de part et d'autre CK. On obtiendra DK égal à TK. Conséquemment les côtés, et de même les carrés des côtés,

---

Hyperbole : $LC = CH = CA$, donc $LC + CK = CA + CK$ ou $TK = DK$, donc

$$\overline{LK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{KB}^2$$

Cercle : $\overline{LK}^2 : \overline{KA}^2 = EK : KA$

$$\overline{BC}^2 : \overline{KB}^2 = EK : KA, \ \overline{BC}^2 . KA = \overline{KB}^2 . EK$$

$$\overline{KB}^3 + \overline{BC}^2 . KB + \overline{BC}^2 . AB = \overline{KB}^3 + \overline{KB}^2 . EK = \overline{KB}^2 . BE$$

ou $\overline{KB}^3 + b . KB + a = c . \overline{KB}^2$, $x = KB$

de ces deux rectangles seront réciproquement proportionnels. Mais le carré de LK est au carré de KA comme EK à KA, à cause du cercle. Il suit donc nécessairement que le carré de BC est au carré de BK comme EK à KA; en sorte que le solide dont la base est le carré de BC et la hauteur KA est égal au solide dont la base est le carré de BK et la hauteur KE. Mais le premier de ces deux solides est égal au nombre donné de côtés du cube de BK, plus le nombre donné. Ajoutons de part et d'autre le cube de BK. Alors le solide dont la base est le carré de BK et la hauteur BE, lequel est égal au nombre donné de carrés du cube de BK, sera égal au cube de BK, plus le nombre donné de ses côtés et plus le nombre donné. Et de même le cube de BF satisfera à la même équation, en vertu de la même démonstration, lorsque les deux points C, H tombent dans l'intérieur du cercle (*).

Lorsque H tombe en dehors du cercle, et que nous décrivons la conique, souvent elle rencontre le cercle par contact ou par intersection (c'est ce cas de cette espèce qui a été mentionné par Aboûl-Djoûd dans la solution du problème dont nous parlerons tout à l'heure); et dès lors la discussion revient à ce que nous venons d'exposer. Mais si la conique ne rencontre pas le cercle, décrivons toujours le rectangle sur une ligne plus petite, ou, dans l'autre cas, plus grande que ZC (**).

---

*) Voici quels sont les cas distingués par l'auteur :

I) C est situé dans l'intérieur du cercle..... $b^2 < ac$.

1) H est situé dans l'intérieur du cercle..... $a^{\frac{3}{2}} + b^2 . \sqrt{c} < \sqrt{a}.bc$.

2) H est situé sur la circonférence du cercle..... $a^{\frac{3}{2}} + b^2 . \sqrt{c} = \sqrt{a}.bc$.

3) H est situé en dehors du cercle..... $a^{\frac{3}{2}} + b^2 . \sqrt{c} > \sqrt{a}.bc$.

II) C est situé sur la circonférence du cercle..... $b^2 = ac$.

III) C est situé en dehors du cercle..... $b^2 > ac$.

**) C'est parfaitement inutile. — « Dans l'autre cas », c'est-à-dire pour raccourcir le rectangle CH dans l'un ou l'autre sens. — Il semble qu'ici l'auteur, de même qu'auparavant, dans la construction de HC sur une base terminée exactement par la circonférence du cercle, puis

Alors, si la conique ne rencontre pas le cercle, le problème est impossible. La démonstration de son impossibilité consistera dans l'inversion de ce que nous venons d'exposer. Lorsque C tombe sur la circonférence ou en dehors du cercle, nous prolongeons CZ, et nous décrivons un rectangle ayant un de ses sommets au point C, et tel que, si l'on faisait passer par le sommet opposé au sommet C une hyperbole de la manière
33 indiquée ci-dessus, elle rencontrerait le cercle par contact ou par intersection. On reconnaît cela au moyen de quelques essais successifs, en employant un cas de cette règle facile, que je ne reproduis pas ici, afin de laisser un exercice aux lecteurs de ce Mémoire. Car celui qui ne serait pas assez fort pour trouver cela lui-même ne comprendrait rien à ce traité, fondé sur les trois ouvrages mentionnés ci-dessus.

Nous démontrons l'impossibilité des cas impossibles de cette espèce, par l'inversion de la démonstration que nous avons donnée pour les cas possibles. Pour cet effet, nous constatons d'abord que le côté du cube doit nécessairement être plus petit que EB, qui représente le nombre donné des carrés (*), parce que, si le côté du cube était égal au nombre donné des carrés, ce cube serait égal au nombre donné de carrés du même, sans qu'on ajoute encore au premier quelque autre chose en fait de nombre ou de côtés du cube; et si le côté du cube était plus grand que le nombre donné des carrés, le cube lui-même serait déjà plus grand que le nombre donné de carrés du même, sans qu'on ajoute encore quelque chose

---

dans la règle qu'il va donner aussitôt, a suivi les traces d'une discussion donnée par ce mathématicien, qui, de l'aveu de l'auteur, s'était occupé antérieurement de cette équation. Mais à la fin, Alkhayyâmi, comme on verra, rejette toutes ces particularités inutiles, et leur substitue une règle qui ne contient en effet que ce qui suffit et ce qui est nécessaire.

*) Si l'on avait $x \gtreqless c$, il s'ensuivrait $x^3 \gtreqless cx^2$ et $x^3 + bx + a > cx^2$; de sorte que, pour que l'équation $x^3 + bx + a = cx^2$ puisse subsister, il faut qu'on ait $x < c$.

à ce cube. Il est donc démontré que le côté du cube doit être plus petit que BE. Conséquemment coupons de BE une partie BF égale au côté du cube, et menons de F une perpendiculaire (à BE) jusqu'à la circonférence du cercle. Puis, intervertissons la démonstration proposée ci-dessus : il résultera que le sommet de la perpendiculaire sera situé sur la circonférence de l'hyperbole (*), dont on avait dit qu'elle ne peut rencontrer le cercle. Mais cela est absurde.

Cependant, puisque je suis d'opinion que ces essais pourraient sembler incommodes à quelques-uns des lecteurs de ce Mémoire, je vais rejeter tout ce procédé, et proposer une règle indépendante de ces essais. Elle consiste à construire sur une ligne (de longueur) arbitraire, prise sur le prolongement de BC, quelle que soit d'ailleurs la position du point C, en dehors ou en dedans du cercle, un rectangle ayant un de ses sommets au point C et égal au rectangle AC, les côtés duquel rectangle seront infailliblement connus de grandeur et de position. Ensuite, à faire passer par le sommet opposé au sommet C une hyperbole ayant pour asymptotes ZC, CM, la der- 34
nière de ces deux lignes étant la perpendiculaire (à ZC) au point C. Alors, si la conique rencontre le cercle par contact

---

*) En effet, puisqu'on avait supposé que BF représente le côté du cube demandé, on a $\overline{BF}^3 + \overline{BC}^2 . BF + \overline{BC}^2 . AB = BE . \overline{BF}^2 = \overline{BF}^3 + \overline{BF}^2 . FE$; donc $\overline{BC}^2 . BF + \overline{BC}^2 . AB = \overline{BF}^2 . FE$ ou $\overline{BC}^2 . AF = \overline{BF}^2 . FE$, et conséquemment $\overline{BC}^2 : \overline{BF}^2 = FE : AF$. Mais on a dans le cercle $\overline{NF}^2 : \overline{FA}^2 = FE : AF$, donc $\overline{NF}^2 : \overline{FA}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{BF}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{BF}^2$ et $NF . FB = FA . AD$ ou $SF = DF$, par conséquent $SF - CF = DF - CF$ ou $NC = CA = CH$; d'où il suit que N est situé sur la circonférence d'une hyperbole qui passe par H, et qui a ZC, CM pour asymptotes.

A l'occasion des autres espèces qui présentent des cas « impossibles », l'auteur s'est toujours borné à remarquer que l'impossibilité a lieu lorsque les deux coniques qui construisent le problème ne se rencontrent pas, sans le prouver. La démonstration qu'il indique ici irait, avec quelques changements, aux autres cas semblables ; de sorte qu'on la peut supposer donnée une fois pour toutes.

J'ai signalé (addition D, premier problème) une semblable démonstration donnée par un autre géomètre arabe.

ou par intersection, le problème est possible; sinon, il est impossible. La démonstration de l'impossibilité sera celle que j'ai présentée ci-dessus.

Un géomètre qui avait besoin de cette espèce la résolut effectivement, si ce n'est qu'il ne démontra pas la variété de ses cas, et qu'il ne lui vint pas à l'esprit que quelquefois la solution est impossible, ainsi que nous l'avons démontré. Donc, remarquez cela, et remarquez surtout la seconde règle relative à la construction de cette équation, et à la distinction des cas possibles d'avec les cas impossibles. Cette espèce a été résolue au moyen des propriétés du cercle combinées avec celles de l'hyperbole; et c'est ce que nous nous proposions d'expliquer.

Voici le problème qui obligea un des géomètres modernes à chercher la solution de cette espèce (*): Diviser dix en deux parties, de sorte que la somme des carrés des deux parties, plus le quotient de la partie majeure par la partie mineure, soit égale à soixante-douze. Or il posa une des deux parties égale à « chose », et l'autre égale à dix moins chose, ainsi que c'est la coutume des algébristes dans les exemples qui présentent de semblables parties. Alors l'emploi des opérations algébriques conduit à un cube plus cinq en nombre et plus treize et demi de ses côtés égal à dix carrés. Dans cet exemple, les deux points C, H tombent exactement dans l'intérieur du cercle; et ce géomètre excellent résolut le problème, qui avait résisté aux efforts de tous les mathématiciens distingués de l'Irâk, du nombre desquels était Aboû Sahl Alqoûhî (**),

---

*) $(10-x)^2 + x^2 + \frac{10-x}{x} = 72$, ou $x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$; les racines sont $x = 2$, $x = 4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{74}$. Les deux points C, H tombent tous les deux en dehors du cercle; l'assertion contraire du texte doit donc être attribuée à une faute de copie commune par hasard aux deux manuscrits, ou à une erreur momentanée de l'auteur.

**) Ce surnom « Alqoûhî » est expliqué dans le *Qitâb Alfihrist*, par les mots من الكوه جبال طبرستان. Pour des détails concernant la vie de ce géomètre, je me borne à renvoyer à *Casiri*, tom. I, p. 441-444, et *Aboûl Faradj*, éd. de Pococke, p. 329. Mais je com-

que Dieu soit miséricordieux envers eux! — si ce n'est que l'auteur de cette solution, que Dieu lui soit favorable! tout illustre

pléterai ce qu'on trouve dans Casiri au sujet des ouvrages d'Alqoûhî. En voici d'abord le catalogue, extrait du *Qitâb Alfihrist :*

1) Traité des centres des instruments (الالات; le texte de Casiri et le Ms. du Târîkh al Hoq. de la Bibl. nat. portent الاكر, « des sphères »), qu'il laissa inachevé.

2) Traité des éléments à la manière de l'ouvrage d'Euclide (على نحو كتاب اقليدس; le texte de Casiri porte على تحريكات اقليدس, et le Ms. du Târîkh al Hoq. على تحريرات اقليدس; tous les deux ajoutent encore à cet ouvrage qu'il resta inachevé).

3) Traité du compas parfait; deux livres.

4) Traité de l'art de construire des astrolabes, avec démonstrations; deux livres.

5) Traité de la détermination des points sur des lignes.

6) Traité au sujet des logiciens relativement à la combinaison continue des deux mouvements, à la défense de Thâbit Ben Korrah.

7) Traité des centres des cercles situés sur des lignes, suivant la méthode de l'analyse, sans synthèse.

8) Traité de la construction des deux lignes en proportion.

9) Traité des cercles qui se touchent, suivant la méthode de l'analyse.

10) Traité des additions au second livre d'Archimède.

11) Traité de la détermination du côté de l'heptagone inscrit au cercle.

Quant aux ouvrages 7 et 9, j'ai rencontré, dans un Ms. de la Bibl. nationale, un mémoire d'Alqoûhî, intitulé : « Des centres de cercles qui se touchent, situés sur des lignes ». Alqoûhî y résout successivement les problèmes suivants : Construire un cercle passant par deux points donnés — ou touchant deux droites données — ou passant par un point donné et touchant une droite donnée — et dont le centre soit situé sur une droite donnée; constr. un cercle passant par un point donné et touchant une droite donnée — ou touchant une droite donnée et un cercle donné — et dont le centre soit situé sur une courbe quelconque donnée; constr. un cercle passant par un point donné et touchant un cercle donné, et dont le centre soit situé sur une droite — puis sur une courbe quelconque donnée; enfin, constr. un cercle dont le centre soit situé sur une courbe quelconque donnée, et touchant deux cercles donnés. A la fin de ce mémoire, l'auteur ajoute : « Avant de prendre connaissance du traité d'Apollonius sur les sections coniques, nous avions résolu un des cas spéciaux de ce problème, lequel ne conduit pas à des sections coniques. C'est celui où la ligne connue de position est une partie de la circonférence d'un cercle, tandis que les centres des trois cercles sont situés sur la même droite. Nous en avons fait mention, ainsi que de quelques-unes de ces propositions, dans notre traité analytique, lequel nous avons intitulé de même : « Des centres de cercles qui se touchent, situés sur des lignes ». Mais nous n'en avons pas parlé ici, parce que cela rentre dans les principes des subdivisions, et que si nous avions voulu nous occuper des subdivisions et des spécifications, et de la synthèse et de l'énumération des différents cas des positions des points suivant la méthode employée par Apollonius dans un de ses ouvrages, notre traité se serait trop étendu. Mais nous espérons pouvoir encore traiter à fond cet objet, si telle est la volonté de Dieu. »

Quant à l'ouvrage 5, c'est probablement le mémoire d'Alqoûhî, dont une copie se trouve dans le même Ms. de la Bibl. nat., où il est intitulé « Traité du problème de mener d'un point donné deux lignes renfermant un angle donné ». Il y est question de mener ces deux lignes de sorte qu'elles aboutissent à une droite donnée de position, et que le rapport — ou le produit des deux segments interceptés entre le point donné et la droite donnée — ou que l'aire du triangle produit — ou que la base de ce triangle — ou que la somme des carrés des deux segments — ou que la somme de ces segments — ou leur différence — soit de grandeur donnée. Puis Alqoûhî résout les quatre premiers cas en supposant que la ligne donnée de posi-

et tout habile mathématicien qu'il était, ne conçut pas l'idée de ces différents cas, bien que parmi les problèmes de cette

---

tion n'est plus droite, mais une circonférence de cercle. Si le sujet de ce mémoire correspond assez au titre de l'ouvrage 5, son titre ressemble encore plus parfaitement à celui de l'ouvrage 8, qui cependant indique peut-être un mémoire sur la construction des deux moyennes proportionnelles.

Quant à l'ouvrage 10, que Casiri a pris pour une addition faite au traité d'Archimède sur les conoïdes et les sphéroïdes — en quoi il s'est trompé — je n'ai qu'à renvoyer aux additions jointes à la fin de cette traduction. J'ai rendu compte dans l'addition C de ce que contenait ce mémoire d'Alqoûhî.

Quant à l'ouvrage 4, il en existe une copie dans un Ms. de la bibliothèque de Leyde; elle y occupe vingt-huit pages, et est suivie d'un commentaire.

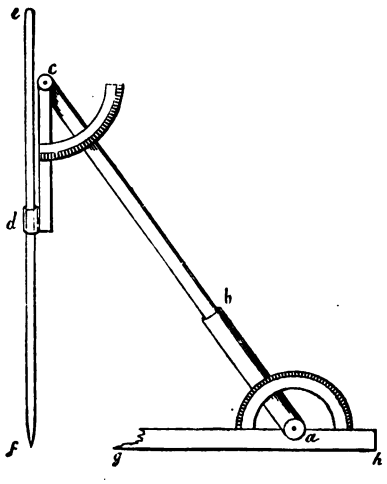
Quant à l'ouvrage 3, la bibl. de Leyde en possède également une copie, cotée n° 1126 du catalogue de 1716, mais que je n'ai pas eue sous les yeux : cependant j'ai examiné un petit mémoire d'un Ms. de la Bibl. nat. qui traite du même sujet, et dans lequel on cite Alqoûhî et Albîroûnî. Ce petit traité fut composé pour le célèbre sultan Almaliq Alnâcir *Selâh Eddîn* Aboûl Mozhaffir Ioûçouf ben Ayoûb, par Mohammed ben Alhoçaïn ben Mohammed ben Alhoçaïn. — Voici quel est le principe de cet instrument imaginé par les géomètres arabes pour décrire les sections coniques par un mouvement continu. Supposons un cône coupé par un plan, désignons par α l'angle générateur du cône, par β l'angle que fait l'axe du cône avec le plan coupant, par K la partie de l'axe comprise entre le sommet du cône et le plan coupant. En désignant par P et A le paramètre et le grand axe de la section produite, on aura $\frac{P}{K} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\beta$, $\frac{A}{K} = \pm \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} \sin\beta$. Réciproquement, A, P, K étant donnés, on pourra déterminer α et β. En effet, posant pour abréger

$$\frac{1}{\pm\frac{P}{A} - 1} = \rho, \quad \left(\frac{P}{K}\right)^2 + 1 = \sigma,$$

on aura $\cos^4\alpha + (\rho \cdot \sigma - 1)\cos^2\alpha - \rho = 0$, $\sin\beta = \frac{P}{K} \cdot \operatorname{cotg}\alpha$:

on voit dès lors que α et β peuvent être déterminés par de simples constructions géométriques.

Je donne ci-contre un dessin de l'instrument arabe. Après avoir déterminé α et β au moyen des éléments (A, P) de la conique qu'il s'agit de décrire, en prenant K égal à la longueur *ca*, faisons l'angle $gab = \beta$, l'angle $bcd = \alpha$. Puis plaçons *gh* sur la direction du grand axe de la conique que nous nous proposons de décrire, et la pointe *f* du crayon sur le sommet de cette conique. On reconnaît sur-le-champ que, si le crayon *ef* peut glisser librement dans le tuyau *d*, et s'allonger pour ainsi dire sans cesse de manière à rester constamment appliqué au plan du papier sur lequel on a placé l'instrument, tandis que le côté *cb* tourne autour de lui-même dans la capsule fixe *ab*, on reconnaît, dis-je, qu'alors *cf* n'est en effet autre chose que l'arête d'un cône dont *ca* est l'axe, et qui est coupé par le plan du papier sur lequel la pointe *f* tracera la conique demandée. Je ne puis ici rendre un compte détaillé de la manière dont le géomètre arabe



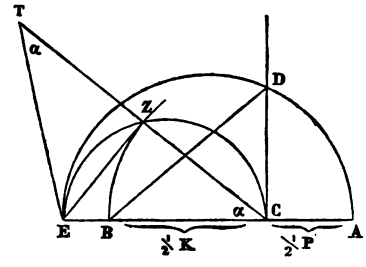
espèce il y en ait d'impossibles. Ce géomètre excellent était Aboûl Djoûd ou Alchannî (*). Dieu seul connaît la vérité.

Quatrième espèce des quatre équations quadrinômes. « DES NOMBRES, DES CÔTÉS ET DES CARRÉS SONT ÉGAUX A UN CUBE (**). » 35

Faisons BE (fig. 26) égale au côté d'un carré égal au nombre des côtés, et construisons un solide ayant pour base le carré de BE, et égal au nombre donné. Que la hauteur de ce solide soit AB, et perpendiculaire à BE. Plaçons BC égale au nombre des carrés sur le prolongement de AB, et complétons le rectangle AE. Donnons à BE le prolongement EM d'une longueur quelconque, et décrivons sur cette droite EM qui est donnée, un rectangle égal à AE. Que ce soit le rectangle EH. Le point H

---

détermine α et β. Mais voici du moins sa construction au cas de la parabole. Il prend $AC = \frac{1}{2}P$, $CB = \frac{1}{2}K$, et détermine E de sorte qu'en coupant un demi-cercle décrit sur AE comme diamètre par une perpendiculaire CD, on ait DB = CE (ce qui revient à construire l'équation du 2e degré $x^2 - \frac{1}{2}Px - \frac{1}{4}\overline{K}^2 = 0$). Ensuite il décrit sur EC un demi-cercle qu'il coupe au point Z par un arc décrit du centre C et du rayon CB. En prolongeant CZ jusqu'à T, de sorte que ZT=ZC, et joignant TE, on aura angle CTE = α, angle TCE = β, qui dans le cas de la parabole est aussi égal à α, et



CT=K. En effet, on a $\overline{ZC}^2 + \overline{ZE}^2 = \overline{CE}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{ZC}^2 + \overline{CD}^2$; donc $\overline{ZE}^2 = \overline{CD}^2 = AC \cdot CE$, et conséquemment $\frac{AC}{ZC} \cdot \frac{ZC}{ZE} = \frac{ZE}{CE}$ ou $\frac{\frac{1}{2}P}{\frac{1}{2}K}$. cotg α = sin α ou $\frac{P}{K}$ = sin α . tg α ; c. q. f. d.

*) Voir le *Loubb Alloubâb* de Soyoûti, éd. de *Veth*, vol. I, pag. ۱۵۷.

**) XXII, $cx^2 + bx + a = x^3$. $\overline{BE}^2 = b$, $\overline{BE}^2 . AB = a$, $BC = c$.
Rectangle HE = rectangle EA.
EM, ES, asymptotes de l'hyperbole équilatère HTK qui passe par le point H.
C sommet, CN axe, AC paramètre de l'hyperbole équilatère LCT.
Hyperbole HTK... $TE = HE = EA$, $TE + EN = EA + EN$ ou $TB = AS$
$\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{SN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{BE}^2$
Hyperbole LCT... $\overline{TN}^2 = NC . AN$ ou $\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = AN : NC$
$\overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 = AN : NC$, $\overline{BE}^2 . AN = \overline{NB}^2 . NC$
$\overline{BE}^2 . AB + \overline{BE}^2 . NB + \overline{NB}^2 . BC = \overline{NB}^2 . NC + \overline{NB}^2 . BC = \overline{NB}^3$
ou $a + b . NB + c . \overline{NB}^2 = \overline{NB}^3$, $x = NB$.

sera alors connu de position. Faisons passer par H une hyperbole ayant pour asymptotes EM, ES; ce sera la courbe HTK. Elle sera connue de position. Ensuite, décrivons une seconde hyperbole ayant son sommet au point C, son axe sur le prolongement de BC, et son paramètre et son grand axe égaux tous les deux à AC. Ce sera la conique LCT. Elle sera connue de position, et coupera infailliblement la conique HTK. Que cette intersection ait lieu au point T. Alors T sera connu de position. Abaissons de T deux perpendiculaires TZ, TN sur BC, BM. Elles seront connues de grandeur et de position, et TE sera égal à EH, qui à son tour est égal à EA. Ajoutons à tous les deux EN; on aura AS égal à TB. Les côtés de ces deux rectangles seront donc réciproquement proportionnels, et il en sera de même pour les carrés de ces côtés. Mais le carré de TN est au carré de AN comme NC à AN, ainsi que nous l'avons démontré plusieurs fois (*), en vertu de l'hyperbole LCT. Conséquemment le carré de BE sera au carré de BN comme NC à NA; et le solide ayant pour base le carré de BE, et pour hauteur AN, sera égal au solide ayant pour base le carré de BN et pour hauteur CN. Mais le premier de ces deux solides est égal au solide dont la base est le carré de BE et la hauteur AB, lequel nous avons fait égal au nombre donné, plus le solide dont la base est le carré de BE et la hauteur BN, lequel est égal au nombre donné de côtés du cube de BN. Ajoutons de part et d'autre le solide dont la base est le carré de BN et la hauteur BC, lequel est égal au nombre donné de carrés du cube de BN. Alors nécessairement le cube de BN sera égal au nombre donné de ses carrés, plus le nombre donné de ses
36 côtés, et plus le nombre donné. Mais c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

*) Voir pag. 49, lig. 1.

Cette espèce ne présente ni variété de cas ni problèmes impossibles (*).

Après avoir terminé l'examen des quatre équations quadrinômes, discutons les trois espèces dont chacune est composée de deux termes qui sont posés égaux à deux autres termes.

Première espèce des trois équations quadrinômes qui restent. « UN CUBE ET DES CARRÉS SONT ÉGAUX A DES CÔTÉS ET UN NOMBRE (**). »

Faisons BD (fig. 27) égale au côté d'un carré égal au nombre donné des côtés, et CB égale au nombre donné des carrés. Que CB soit perpendiculaire à BD. Construisons un solide ayant pour base le carré de BD, et égal au nombre donné. Que la hauteur de ce solide soit S. La ligne S sera ou plus grande ou plus petite que BC, ou égale à BC.

Que d'abord S soit plus petite que BC (fig. 27, 1). Prenons sur BC un segment AB égal à S, complétons AD, et prenons sur le prolongement de BD une longueur quelconque DZ. Décrivons sur DZ un rectangle égal à AD, lequel soit ED. Le point E sera connu de position, et les côtés du rectangle ED seront tous connus de position et de grandeur. Faisons passer par le point E une hyperbole ayant pour asymptotes ZD, DO. Ce

---

*) L'équation $x^3 - cx^2 - bx - a = 0$ a toujours une racine réelle et positive; les deux autres racines sont ou imaginaires ou négatives, et conséquemment n'existent pas pour l'algébriste arabe.

**) XXIII, $x^3 + cx^2 = bx + a$. $\overline{BD}^2 = b$, $BC = c$, $\overline{BD}^2 . S = a$. $S \lessgtr BC$.

1) $S < BC$ (fig. 27, 1), $AB = S$. — Rectangle ED = rectangle AD.
DZ, DO, asymptotes de l'hyperbole équilatère EH qui passe par le point E.
A sommet, AB axe, AC paramètre de l'hyperbole équilatère AHT.
Hyperbole EH... $HD = ED = AD$, $HD + DK = AD + DK$ ou $HB = AM$
$\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{MK}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{KB}^2$
Hyperbole AHT... $\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = CK : AK$
$\overline{BD}^2 : \overline{KB}^2 = CK : AK$, $\overline{KB}^2 . CK = \overline{BD}^2 . AK$
$\overline{KB}^3 + \overline{KB}^2 . BC = \overline{BD}^2 . KB + \overline{BD}^2 . AB$ ou $\overline{KB}^3 + c . \overline{KB}^2 = b . KB + a$, $x = KB$.

sera la conique EH, et cette courbe sera connue de position. Décrivons ensuite une seconde hyperbole ayant son sommet au point A, son axe sur AB, et son paramètre et son grand axe égaux tous les deux à AC. Ce sera la conique AHT, et elle coupera nécessairement l'autre conique. Que cette intersection ait lieu au point H. Alors H sera connu de position. Abaissons de H deux perpendiculaires HK, HL. Toutes les deux seront connues de position et de grandeur, et le rectangle HD sera égal à ED, lequel à son tour est égal à AD. Ajoutons le rectangle commun DK. Le rectangle HB sera égal à AM. Il s'ensuit que leurs côtés et les carrés de leurs côtés seront réciproquement proportionnels. Mais le carré de HK est au carré de KA comme CK à AK, en vertu de l'hyperbole AHT, ainsi que nous l'avons démontré plusieurs fois. Conséquemment le carré de BD sera au carré de KB comme CK à AK, et le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur AK
37 sera égal au solide dont la base est le carré de BK et la hauteur CK. Mais ce second solide est égal au cube de BK, plus le solide ayant pour base le carré de BK et pour hauteur BC, lequel est égal au nombre donné de carrés. D'un autre côté, le premier des deux solides est égal au solide ayant pour base le carré de BD et pour hauteur AB, lequel nous avons fait égal au nombre donné, plus le solide ayant pour base le carré de BD et pour hauteur BK, lequel est égal au nombre donné de côtés du cube de BK. Conséquemment le cube de BK, plus le nombre donné de ses carrés, est égal au nombre donné plus le nombre donné de ses côtés. Et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Lorsque S est égale à BC (*), BD sera le côté du cube cher-

*) 2) $S = BC \ldots x = BD$. *Démonstr.* $\overline{BD}^2 . BD = \overline{BD}^3$ ou $b . BD = \overline{BD}^3$
$\overline{BD}^2 . BC = \overline{BD}^2 . S$ ou $c . \overline{BD}^2 = a$
conséquemment $\overline{BD}^3 + c . \overline{BD}^2 = b . BD + a$.

ché. Démonstration. Le solide ayant pour base le carré de BD et pour hauteur aussi BD, et qui représente le nombre de côtés du cube de BD, est égal au cube de BD. Et le solide ayant pour base le carré de BD et pour hauteur BC, et qui représente le nombre donné de carrés du cube de BD, est égal au solide ayant pour base le carré de BD et pour hauteur S, qui représente le nombre donné. Conséquemment le cube de BD, plus le nombre donné de ses carrés, est égal au nombre donné plus le nombre donné de côtés. Et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir. Mais on reconnaîtra aisément que dans ce cas il y aura aussi égalité entre le cube de BD plus le nombre donné, et le nombre donné de carrés plus le nombre donné de côtés de ce cube; en sorte que cette espèce rentre dans la catégorie de la troisième espèce, laquelle est : « Un cube et des nombres sont égaux à des carrés et des côtés. »

Lorsque S est plus grande que BC (fig. 27, 2), nous faisons AB égale à S, et faisons passer la seconde hyperbole par le point C, en prenant son paramètre et son grand axe, tous les deux égaux à AC. Elle coupera nécessairement l'autre conique, le côté du cube sera encore BK, et le reste de la construction et de la démonstration est analogue à ce qui précède, si ce n'est que le carré de HK sera au carré KA comme AK à KC (*).

Il a été démontré que cette espèce présente des formes et des

---

Mais en même temps $\overline{BD}^3 + a = c.\overline{BD}^2 + b.BD$, ce qui rentre dans la catégorie de l'éq. 25) $x^3 + a = cx^2 + bx$.

*) C'est-à-dire que les points A et C, tels qu'ils étaient dans la première figure, ont, si l'on veut, échangé leurs rôles. Mais en réalité la démonstration donnée ci-dessus s'applique rigoureusement aussi à la seconde figure, et l'on aura par rapport à celle-ci, comme auparavant, $\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = CK : AK$. — Le fait est que réellement rien n'est changé dans les deux coniques qui construisent l'équation; seulement l'intersection considérée ici se fait sur l'autre branche de la seconde hyperbole. On peut passer du premier cas au second en faisant mouvoir A sur BC vers C et jusqu'au delà de C; lorsque A et C coïncident (S = BC),

BE. Ajoutons de part et d'autre le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur BA, lequel nous avons fait égal au nombre donné. Alors le cube de BE, plus le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur BE, lequel est égal au nombre donné de côtés du cube de BE, sera égal au nombre donné de carrés du même, plus le nombre donné. Et c'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Lorsque S est égale à BC (*), BC sera le côté du cube cherché. Démonstration. Le cube de BC est égal au nombre donné de ses carrés, et le solide dont la hauteur est BC, et la base le carré de BD, est égal au nombre donné, et égal aussi au nombre donné de côtés du cube de BC. Conséquemment le cube de BC, plus le nombre donné de ses côtés, est égal au nombre donné de ses carrés plus le nombre donné. Mais ce cas rentre aussi dans la catégorie de la troisième espèce, parce que le nombre donné de côtés du cube de BC est égal au nombre donné, en sorte que le cube de BC, plus le nombre donné, est égal au nombre donné de carrés plus le nombre donné de côtés de ce cube.

Lorsque S est plus grande que BC (fig. 28, 2) (**), faisons BA égale à S, et décrivons le cercle sur AC comme diamètre. Alors

---

*) 2) $S = BC \ldots x = BC$. *Démonstr.* $\overline{BC}^3 = BC.\overline{BC}^2$ ou $\overline{BC}^3 = c.\overline{BC}^2$

$\overline{BD}^2.BC = \overline{BD}^2.S$ ou $b.BC = a$

conséquemment $\overline{BC}^3 + b.BC = c.\overline{BC}^2 + a$.

Mais en même temps $\overline{BC}^3 + a = c.\overline{BC}^2 + b.BC$, ce qui rentre dans la catégorie de l'éq. 25) $x^3 + a = c.x^2 + b.x$.

**) 3) $S > BC$ (fig. 28, 2), $AB = S$.

Hyperbole : $AD = KD$, $AD - ED = KD - ED$ ou $EZ = BK$

$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{ZA}^2 : \overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$

Cercle : $\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = EC : EA$

$\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 = EC : EA$, $\overline{BE}^2.EC = \overline{BD}^2.EA$

$\overline{BE}^3 = \overline{BD}^2.EA + \overline{BE}^2.BC$, $\overline{BE}^3 + \overline{BD}^2.EB = \overline{BD}^2.AB + BC.\overline{BE}^2$

ou $\overline{BE}^3 + b.BE = a + c.\overline{BE}^2$, $x = BE$.

l'hyperbole qui passe par le point A coupera le cercle au point K, comme nous l'avons démontré. Abaissons du point K deux perpendiculaires KE, KM, ainsi que nous l'avons fait dans la figure précédente. EB sera le côté du cube cherché, et la démonstration est comme auparavant. Nous retranchons le rectangle commun ED; les côtés des deux rectangles EM, EZ, ainsi que les carrés de ces côtés, seront réciproquement proportionnels, et la démonstration sera absolument analogue à la précédente, sans rien y changer.

On vient de démontrer que cette espèce présente des formes et des cas différents, et qu'une de ses formes rentre dans la 40
catégorie de la troisième espèce. L'espèce actuelle ne donne pas lieu à des problèmes impossibles (*), et a été résolue au moyen des propriétés du cercle et d'une hyperbole.

Troisième espèce des trois équations quadrinômes qui restaient. « UN CUBE ET DES NOMBRES SONT ÉGAUX A DES CÔTÉS ET DES CARRÉS (**). »

Faisons BC (fig. 29) égale au nombre des carrés, et BD perpendiculaire à BC, et égale au côté d'un carré égal au nombre

---

*) L'équation $x^3 - cx^2 + bx - a = 0$ a toujours une racine réelle et positive. Dans les cas 2) et 3), lorsque $\frac{a}{b} \gtrless c$, les deux autres racines sont imaginaires; mais dans le premier cas, $\frac{a}{b} < c$, elles peuvent être positives, en sorte que l'équation alors aura *trois racines positives*. Il est bien à regretter qu'une circonstance aussi importante ait pu échapper à l'auteur.

**) XXV, $x^3 + a = cx^2 + bx$. $BC = c$, $\overline{BD}^2 = b$, $\overline{BD}^2 . S = a$. $S \gtrless BC$

1) $S < BC$ (fig. 29, 1), $AB = S$.

BD, DZ, asymptotes de l'hyperbole équilatère HAT qui passe par le point A.
C sommet, CE axe, AC paramètre de l'hyperbole équilatère KML.
Hyperbole HAT... $DA = DM$, $DA - ZN + AM = DM - ZN + AM$ ou $NE = ZE$

$$\overline{ME}^2 : \overline{EA}^2 = OE : BE = DB : BE$$

Hyperbole KML... $\overline{ME}^2 : \overline{EA}^2 = CE : EA$

$$\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 = CE : EA, \quad \overline{BE}^2 . CE = \overline{BD}^2 . EA$$

$\overline{BE}^2 . BC + \overline{BE}^2 . CE$ ou $\overline{BE}^3 = \overline{BE}^2 . BC + \overline{BD}^2 . EA$

$\overline{BE}^3 + \overline{BD}^2 . AB = \overline{BE}^2 . BC + \overline{BD}^2 . BE$ ou $\overline{BE}^3 + a = c . \overline{BE}^2 + b . BE$, $x = BE$.

des racines. Construisons un solide ayant pour base le carré de BD, et égal au nombre donné. Que la hauteur de ce solide soit S. La ligne S sera, ou plus petite que BC, ou égale à BC, ou plus grande que BC.

Que d'abord S soit plus petite que BC (fig. 29, 1). Prenons sur BC un segment BA égal à S, complétons BZ, faisons passer par le point A une hyperbole ayant pour asymptotes BD, DZ, laquelle soit la conique HAT, et décrivons une seconde hyperbole ayant son sommet au point C, son axe sur le prolongement de BC, et son paramètre et son grand axe égaux tous les deux à AC. Cette hyperbole, qui sera KCL, coupera infailliblement l'autre conique. Que l'intersection des deux coniques KCL et HAT ait lieu au point M. Le point M sera connu de position, parce que les deux coniques sont connues de position. Abaissons de ce point deux perpendiculaires MN, EMO. Elles seront connues de position et de grandeur, le rectangle DA sera égal au rectangle DM; et, par les raisonnements que précédemment nous avons employés plusieurs fois, on trouvera NE égal à ZE, et conséquemment les côtés de ces deux rectangles et les carrés de leurs côtés seront réciproquement proportionnels. Mais le carré de ME est au carré de EA comme CE à EA, en vertu de l'hyperbole KCL. Conséquemment le carré de BD sera au carré de BE comme CE à EA, et le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur EA sera égal au solide dont la base est le carré de BE et la hauteur CE. Ajoutons à tous les deux le solide dont la base est le carré de BE et la hauteur BC, lequel représente le nombre de carrés du cube de BE. Alors le cube de BE sera égal au nombre donné de ses carrés, plus le solide dont la base est le carré de BD et la hau-
41 teur EA. Ajoutons de part et d'autre le solide dont la hauteur est BA et la base le carré de BD, lequel nous avons fait égal au

nombre donné. Il résultera que le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur BE, lequel est égal au nombre donné de côtés du cube de BE, plus le nombre donné de carrés du cube de BE, est égal au cube de BE, plus le nombre donné.

Lorsque S est égale à BC (*), BC sera le côté du cube. Démonstration. Le cube de BC est égal au nombre donné de ses carrés, et le nombre donné est égal au nombre donné de côtés du cube de BC. Conséquemment le cube de BC, plus le nombre donné, est égal au nombre donné de carrés, plus le nombre donné de côtés de ce cube; et c'est ce qu'il s'agit d'obtenir. D'un autre côté, le cube de BC, plus le nombre donné de ses côtés, sera égal au nombre donné de ses carrés, plus le nombre donné; en sorte que ce cas rentre dans la seconde espèce.

Lorsque S est plus grande que BC (fig. 29, 2) (**), faisons BA égale à S, complétons le rectangle (BZ), et faisons passer la première hyperbole par A et la seconde également par A. Elles se couperont. Or, si les deux coniques ont une seconde rencontre, soit par contact en un seul point ou par intersection en deux points, ainsi que cela est connu d'après le quatrième livre du traité des Coniques, le problème sera possible; sinon, il

---

*) 2) $S = BC \ldots x = BC$. *Démonstr.* $\overline{BC}^3 = BC \cdot \overline{BC}^2$ ou $\overline{BC}^3 = c.\overline{BC}^2$

$\overline{BD}^2 . S = \overline{BD}^2 . BC$ ou $a = b.BC$

conséquemment $\overline{BC}^3 + a = c.\overline{BC}^2 + b.BC$.

Mais en même temps aussi $\overline{BC}^3 + b.BC = c \cdot \overline{BC}^2 + a$, ce qui rentre dans la catégorie de l'équation 24) $x^3 + bx = cx^2 + a$.

Ce qui échappe à l'auteur, c'est que dans ce cas aussi $x = BD$ sera une solution, et que l'on a

$\overline{BD}^3 = \overline{BD}^2 . BD$ ou $\overline{BD}^3 = b.BD$

$\overline{BD}^2 . S = \overline{BD}^2 . BC$ ou $a = c.\overline{BD}^2$

donc $\overline{BD}^3 + a = c.\overline{BD}^2 + b.BD$.

Et en même temps on aura $\overline{BD}^3 + c.\overline{BD}^2 = b.BD + a$, ce qui rentre dans la catégorie de l'équation 23) $x^3 + cx^2 = bx + a$.

**) 3) $S > BC$ (fig. 29, 2), $AB = S$. — Hyperbole HAT comme auparavant. — A sommet, AE axe, AC paramètre de l'hyperbole équilatère KML. — Ensuite la démonstration donnée pour le cas 1) s'applique trait pour trait à cette seconde figure.

sera impossible. Si les deux coniques se coupent, abaissons des deux points d'intersection deux perpendiculaires; elles détermineront, comme segments, deux côtés correspondant à deux cubes (dont chacun satisfait à l'équation proposée). La démonstration est comme ci-dessus, sans que rien y soit changé.

On vient de démontrer que cette espèce a différents cas, et parmi eux d'impossibles (*). Elle a été résolue au moyen des propriétés de deux hyperboles.

Il est évident aussi que ces trois équations quadrinômes rentrent l'une dans l'autre, c'est-à-dire qu'on trouve un cas de la première qui est exactement aussi un cas de la seconde (**), et un cas de la seconde identique avec un cas de la troisième, et un cas de la troisième qui s'identifie absolument avec un cas de la seconde, ainsi que nous l'avons démontré.

Après avoir ainsi terminé la discussion des vingt-cinq espèces des propositions de l'algèbre, après en avoir fait l'examen le plus exact et le plus complet, après avoir fait connaître les cas particuliers de chacune de ces espèces, après avoir proposé

---

*) Dans les cas $S \leqq BC$, c.-à-d. $\frac{a}{b} \leqq c$, l'équation $x^3 - cx^2 - bx + a = 0$ a toujours deux racines positives.

Dans le cas $\frac{a}{b} < c$, l'auteur ne trouve par sa construction qu'une seule de ces deux racines, tandis que l'autre lui échappe. A cette dernière correspond le point d'intersection P (fig. 29, 1) de l'hyperbole HAT avec l'autre branche de l'hyperbole KCL. La perpendiculaire abaissée de P sur BA rencontrera cette droite entre B et A, c.-à-d. que cette perpendiculaire rencontrera le côté positif de l'axe des abscisses. L'auteur aurait dû remarquer cette circonstance.

Lorsque $\frac{a}{b} = c$, l'autre racine positive est $x = +\sqrt{b}$ ou $x = BD$.

Pour le cas $\frac{a}{b} > c$, l'auteur observe avec justesse que, ou bien les deux coniques auront une intersection en deux points, ou un contact en un point, ou le problème sera impossible; c.-à-d. que l'équation a, ou bien deux racines positives et inégales, ou positives et égales $\left(x = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}\sqrt{3b + c^2}\right)$, ou deux racines imaginaires.

Dans tous les trois cas l'équation a, outre ces deux racines conjuguées, une racine réelle et négative, dont l'existence est naturellement ignorée par l'algébriste arabe.

**) Plutôt de la troisième. Voir pag. 60 ult. sqq.

la règle pour distinguer les cas possibles d'avec les impossibles 42
dans les espèces qui admettent des problèmes impossibles, et après avoir démontré que la plupart d'entre elles n'en admettent pas (*), occupons-nous des parties correspondantes (**).

La partie de la chose est le nombre qui est à l'unité comme l'unité est à cette chose (***). Donc, si la chose est trois, sa partie est un tiers; et si la chose est un tiers, sa partie est trois. De même si elle est quatre, sa partie est un quart; et si elle est un quart, sa partie est quatre. Et en général la partie d'un nombre quelconque est la partie dénommée d'après ce nombre (****), comme le tiers d'après trois, lorsque le nombre est entier, et trois d'après un tiers, lorsque le nombre est fractionnaire. Pareillement la partie du carré est la partie dénommée d'après le nombre égal à ce carré, que ce nombre soit entier ou fractionnaire; et il en est de même relativement à la partie du cube. Et, pour en rendre l'évidence plus palpable, disposons ces parties en tableau :

Partie du cube.	Partie du carré.		Partie de la racine.
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
Unité.	Racine.	Carré.	Cube.
1	2	4	8

La partie du cube est à la partie du carré comme la partie

---

*) En effet, parmi les 25 espèces, 7 seulement, à savoir les équations 8, 11, 14, 17, 20, 21, 25, donnent lieu à des cas dans lesquels l'équation n'admet pas des racines réelles et positives.

**) Pour ôter à la terminologie employée par l'auteur dans ce qui suit ce qu'elle peut, au premier abord, avoir de choquant, il suffira de remarquer qu'il entend par « partie de A » la valeur réciproque de A, et par « N parties de A » la fraction $\frac{N}{A}$. On peut d'ailleurs comparer à ce sujet les définitions du septième livre d'Euclide.

***) $\frac{1}{x} : 1 = 1 : x$.

****) C'est-à-dire la fraction ayant pour dénominateur ce nombre, et pour numérateur l'unité.

du carré à la partie de la racine, comme la partie de la racine à l'unité, comme l'unité à la racine, comme la racine au carré, et comme le carré au cube. Ce sont donc sept degrés en proportion continue. Nous allons traiter exclusivement des équations qui ont lieu entre lesdits degrés. Quant à la partie du
43 carré-carré et à la partie du quadrato-cube et à la partie du cubo-cube, et ainsi de suite, elles sont aussi en proportion continue. Mais nous n'avons pas besoin de nous en occuper, parce qu'il n'y a pas moyen de résoudre (les équations renfermant) ces autres degrés.

Sache que si tu considères le huitième, qui est partie du cube, comme cube, sa partie sera huit, ce qui est le cube par inversion (*). Et la même règle s'applique aux autres parties; de sorte que ces quatre degrés, la partie du cube, la partie du carré, la partie de la racine et l'unité, forment une analogie avec le cube, le carré, la racine et l'unité. Par exemple, si l'on dit(**) : « Une partie de carré est égale à la moitié d'une partie de racine, » c'est la même chose que si l'on avait dit : « Un carré est égal à la moitié d'une racine. » Alors ce carré est un quart, ce qui est en réalité une partie de carré, et le carré cherché sera quatre, la partie (du carré cherché) un quart, et la partie de la racine (du carré cherché) un demi. C'est là la méthode à suivre pour les équations simples.

Quant aux équations composées, lorsqu'on dit (***) : « Une

---

*) C'est-à-dire que si à $\frac{1}{x^3}$ on a substitué z^3, on trouvera x^3, en prenant, après avoir déterminé z^3, la valeur réciproque de z^3.

**) Équation proposée : $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$; on résout $z^2 = \frac{1}{2} z$, ce qui donne $z^2 = \frac{1}{4}$; donc $x^2 = 4$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

***) Équation proposée : $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$; on résout $z^2 + 2z = 1\frac{1}{4}$, ce qui donne $z = \frac{1}{2}$, $z^2 = \frac{1}{4}$, donc $x^2 = 4$.

partie de carré et deux parties de racine sont égales à un et un quart, » c'est comme si l'on avait dit : « Un carré et deux racines sont égaux à un et un quart. » Alors, au moyen de la méthode exposée précédemment, on trouve la racine égale à un demi et le carré égal à un quart, si ce n'est que l'énoncé du problème portait « une *partie* de carré et deux *parties* de racine. » Donc le quart, qui était d'abord le carré, sera la partie du carré cherché, et le carré cherché sera quatre.

On suivra le même procédé dans les équations à quatre termes. Lorsqu'on dit (*) : « Une partie de cube plus trois parties de carré plus cinq parties de racine sont égales à trois et trois huitièmes, » alors c'est comme si l'on avait dit : « Un cube plus trois carrés plus cinq racines sont égaux à trois et trois huitièmes. » Au moyen de la méthode exposée ci-dessus et fondée sur les sections coniques, on déterminera le côté du cube, lequel sera la partie de racine cherchée. Nous poserons donc ce côté à l'unité donnée, comme l'unité donnée à une autre ligne (inconnue). Cette dernière ligne sera le côté du cube cherché.

Il est évident qu'il existera entre ces quatre degrés vingt-cinq autres espèces de telles équations, proportionnelles aux vingt-cinq espèces précédentes.

Quant à la multiplication de l'un de ces degrés par l'autre, c'est une matière suffisamment connue par les ouvrages des algébristes, facile à comprendre, et sur laquelle, conséquem- 44
ment, nous ne nous étendrons pas (**). Or, quant aux équations entre ces quatre degrés et les quatre degrés précé-

---

*) Équation proposée : $\frac{1}{x^3} + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x} = 3\frac{3}{8}$; on résout $z^3 + 3z^2 + 5z = 3\frac{3}{8}$; ayant déterminé la racine ζ de cette dernière équation, on fait $\zeta : 1 = 1 : l$, et l'on aura $x = l$.

**) L'auteur appelle ici préalablement l'attention du lecteur sur la multiplication des différentes puissances de l'inconnue l'une par l'autre, parce que c'est le moyen qu'il emploie pour résoudre les équations qu'il va proposer.

dents (*), on y procède comme je vais exposer. Lorsqu'on dit (**) : « Un cube est égal à dix parties de cube, » c'est-à-dire à dix parties de lui-même, alors le cube est le premier des sept degrés, et parties du cube le septième. Multiplie l'un par l'autre, et prends la racine du produit. Le résultat sera (de l'ordre) du degré moyen, c'est-à-dire du quatrième (***), et égal au cube cherché. Pour plus de précision, nous remarquerons que chaque nombre multiplié en sa partie produit l'unité; que, multiplié en deux de ses parties, il produit deux; et que, multiplié en dix de ses parties, il produit dix en nombre (****). Et c'est comme si dans notre exemple on avait dit : « Quel cube multiplié en lui-même est égal à dix? » Donc la racine de dix sera le cube cherché. Puis la détermination du côté de ce cube est effectuée de la manière démontrée ci-dessus au moyen des sections coniques. — Et de même lorsqu'on dit (*****) : « Quel carré est égal à seize des parties dénommées d'après lui? » alors multiplie l'unité en seize et prends la racine du produit, laquelle est quatre; ce sera le carré cherché. Et, conformément à la règle précédente, c'est comme si l'on avait dit : « Quel carré multiplié en lui-même est égal à seize? » — Et de même lorsqu'on dit (******) : « Quelle racine est égale à quatre de ses parties? » c'est comme si l'on avait dit : « Quel

---

*) L'auteur suppose les sept puissances arrangées de la manière suivante :

1) x^3 2) x^2 3) x 4) 1 5) $\frac{1}{x}$ 6) $\frac{1}{x^2}$ 7) $\frac{1}{x^3}$

**) $x^3 = 10 \cdot \frac{1}{x^3}$, $x^3 \cdot x^3 = 10 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot x^3 = 10$, $x^3 = \sqrt{10}$.

***) C'est-à-dire il sera égal à un nombre (entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel) d'unités.

****) $n \cdot \left(p \cdot \frac{1}{n}\right) = p$

*****) $x^2 = 16 \cdot \frac{1}{x^2}$, $x^2 \cdot x^2 = 16 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 16$, $x^2 = \sqrt{16} = 4$.

******) $x = 4 \cdot \frac{1}{x}$, $x \cdot x = 4 \cdot \frac{1}{x} \cdot x = 4$, $x = \sqrt{4} = 2$.

nombre multiplié en lui-même produit quatre? » Or, ce nombre est deux.

Mais si l'on dit (*) : « Quel carré est égal à un certain nombre de parties du cube de son côté? » alors la solution de ce problème ne peut pas être effectuée au moyen des méthodes que nous avons exposées, parce qu'elle dépend de la détermination de quatre lignes (moyennes proportionnelles) entre deux lignes données (**), en sorte que les six lignes soient en proportion continue. C'est ce qui a été démontré par Aboû Alî Ibn Alhaïtham (***), que Dieu le Très-Haut soit miséricordieux en-

---

*) $x^2 = a \cdot \frac{1}{x^3}$.

**) En effet, déterminant quatre lignes x, y, v, w, de sorte que $1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a$, on aura $x^5 = a$ ou $x^2 = a \cdot \frac{1}{x^3}$.

***) Voir *Casiri*, t. I, pag. 414 sqq. — *Aboûl Faradj*, éd. de Pococke, pag. 340-342. — *Gartz*, de Interpretibus et Explanatoribus Euclidis Arabicis; Halae, 1823, pag. 22-24.

En vertu de la règle donnée par M. de Sacy dans son *Anthologie grammaticale* (pag. 113), j'ai adopté dans le texte la leçon du ms. C; car j'ai trouvé que le nom complet de ce géomètre était Alhaçan Ben Alhaçan Ben Alhaïtham, de sorte que d'Alhaïtham à lui il n'y a pas descendance immédiate.

Relativement aux ouvrages d'Ibn Alhaïtham, et particulièrement à ceux de ses ouvrages qui se rapportent aux sciences mathématiques, j'extrais deux passages du ms. des Biographies des médecins célèbres par *Ibn Abî Oçaïbiah*, que possède la Bibliothèque nationale. Dans le quatorzième chapitre de son ouvrage, Ibn Abî Oçaïbiah consacre à la vie et aux écrits d'Ibn Alhaïtham (qu'il nomme Mohammed, tandis que, suivant le Târîkh Alhoqamâ, Ibn Alhaïtham s'appelait Alhaçan) un article très-étendu, et renfermant des détails beaucoup plus circonstanciés que n'en offrent les notices données sur ce géomètre par Casiri, et dans le ms. du Târîkh Alhoqamâ que possède la Bibliothèque nationale. Voici les deux passages ayant trait plus spécialement à ce qui doit nous intéresser ici :

« Mohammed Ben Alhaçan a dit..... Et de ce que j'ai composé sur les sciences mathématiques, le nombre des ouvrages monte à vingt-cinq : 1° Commentaire et abrégé des éléments de géométrie et d'arithmétique d'Euclide; 2° Recueil des Éléments de géométrie et d'arithmétique, tiré des traités d'Euclide et d'Apollonius : dans cet ouvrage, j'ai classé et divisé les éléments et en ai donné des démonstrations fondées sur les mathématiques, le calcul et la logique, de sorte que, quant à l'arrangement des matières, j'ai renversé l'ordre suivi par Euclide et Apollonius; 3° Commentaire et abrégé de l'Almageste, fondé sur des démonstrations; je n'y ai rien traité au moyen du calcul, si ce n'est un très-petit nombre de problèmes sans importance; mais si Dieu me donne la vie et que les circonstances me permettent de l'achever, je commencerai un commentaire très-détaillé du même ouvrage, dans lequel je ramènerai tout à l'arithmétique et au calcul; 4° Recueil des éléments du calcul, ouvrage dans lequel j'ai déduit, des principes posés par Euclide dans ses Éléments de géométrie et d'arithmétique, les éléments de toutes les espèces du calcul; j'y ai établi la

méthode de la résolution des problèmes du calcul, par le double moyen de l'analyse géométrique et de la vérification arithmétique, en m'abstenant, en même temps, d'y employer les principes et les termes techniques des algébristes; 5° Abrégé d'optique, tiré des deux ouvrages d'Euclide et de Ptolémée; j'y ai complété (restitué) le sujet du premier livre perdu du traité de Ptolémée; 6° Traité de l'analyse des problèmes géométriques; 7° Traité de l'analyse des problèmes arithmétiques par la méthode de l'algèbre, avec démonstrations; 8° Traité complet sur l'analyse des problèmes géométriques et arithmétiques; toutefois la partie qui se rapporte aux problèmes arithmétiques est sans démonstrations, mais fondée sur les principes de l'algèbre; 9° Traité de la mesure à la manière des Éléments; 10° Traité du calcul des opérations commerciales; 11° Perfection de l'art de creuser et d'édifier, ouvrage dans lequel j'ai fait correspondre à tout ce qui se présente dans ces deux arts toutes les figures géométriques, en allant jusqu'aux figures des trois sections coniques, de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipse; 12° Abrégé des livres d'Apollonius sur les sections coniques; 13° Mémoire sur le calcul indien; 14° Mémoire sur la détermination de l'azimut de la Kiblah dans toute la terre habitée, avec des tables que j'ai construites, sans donner les démonstrations des procédés exposés; 15° De certains problèmes géométriques indispensables pour les rites religieux; 16° Lettre adressée à plusieurs raïs, pour encourager aux observations astronomiques; 17° Introduction à la géométrie; 18° Mémoire sur la réfutation de la démonstration que l'hyperbole et ses deux asymptotes s'approchent indéfiniment l'une des autres, sans cependant jamais se rencontrer; 19° Réponse à sept problèmes mathématiques qu'on m'avait proposés à Bagdâd, puis j'y ai répondu; 20° Traité sur l'analyse et la synthèse des géomètres, à l'usage des étudiants, recueil de problèmes géométriques et arithmétiques, résolus et arrangés par moi; 21° Traité de l'instrument universel, abrégé extrait du traité d'Ibrâhîm Ben Henân; 22° Mémoire sur la détermination géométrique de la distance entre deux lieux terrestres; 23° Mémoire sur les éléments des problèmes arithmétiques et sur leur analyse; 24° Mémoire pour résoudre un doute sur Euclide, relativement au cinquième livre de son Traité des éléments mathématiques; 25° Mémoire sur la démonstration du théorème proposé par Archimède, relativement à la trisection de l'angle, qu'il ne démontra pas (c'est probablement une erreur, et il faut lire : relativement à la section de la ligne, etc.; voir l'addition A du présent opuscule). »

..... « Je dis. Et c'est là que finit ce que j'ai trouvé en fait de cela, écrit de la main de Mohammed Ben Alhaçan Ben Alhaïtham, l'auteur : que la miséricorde divine repose sur lui ! Et voici encore une liste des ouvrages d'Ibn Alhaïtham que j'ai trouvée, et qui va jusqu'à la fin de l'an 429 : 1° Mémoire sur la configuration du monde; 2° Commentaire sur les définitions de l'ouvrage d'Euclide (Voir *Gartz*, loc. cit. — C'est probablement l'ouvrage côté n° 1069 du catalogue de la bibliothèque de Leyde de 1716); 3° Traité d'optique en sept livres (c'est probablement un commentaire de cet ouvrage, qui est coté n° 1073 du catalogue de la bibliothèque de Leyde); 4° Mémoire sur la manière de faire des observations astronomiques; 5° Mémoire sur les étoiles qui se forment dans l'air; 6° Mémoire sur la lumière de la lune; 7° Mémoire sur la détermination de l'azimut de la Kiblah au moyen du calcul; 8° Mémoire sur l'arc-en-ciel et sur le halo; 9° Mémoire sur les différences apparentes des hauteurs des étoiles; 10° Traité du calcul des opérations commerciales; 11° Mémoire sur le cadran solaire horizontal; 12° Mémoire sur l'observation des étoiles; 13° Traité du compas des sections coniques; 14° Deux livres des centres de continuité; 15° Mémoire sur les éléments de la mesure; 16° Mémoire sur la mesure de la sphère; 17° Mémoire sur la mesure du solide parabolique; 18° Mémoire sur le miroir ardent circulaire; 19° Mémoire sur les miroirs ardents courbés suivant des sections coniques (comparer relativement à ces deux ouvrages le catalogue de la bibliothèque de Leyde, n° 1074); 20° Abrégé sur les figures de la nouvelle lune; 21° Mémoire développé sur les figures de la nouvelle lune; 22° Abrégé sur les compas des grands cercles; 23° Mémoire développé sur le compas des cercles (*sic*); 24° Mémoire sur l'azimut; 25° Mémoire pour faire remarquer les parties

vicieuses des méthodes d'observations astronomiques; 26° Mémoire démontrant que la sphère est la plus grande des figures solides isopérimètres, et le cercle la plus grande des figures planes isopérimètres; 27° Mémoire sur l'optique, suivant la méthode de Ptolémée; 28° Traité sur le perfectionnement des opérations astronomiques, deux livres; 29° Mémoire sur la détermination de quatre lignes (moyennes proportionnelles) entre deux lignes données (*c'est l'ouvrage cité par Alkhayyâmî*); 30° Mémoire sur la quadrature du cercle; 31° Mémoire sur la détermination de la méridienne avec la dernière exactitude; 32° Mémoire sur l'addition des fractions; 33° Mémoire sur les propriétés de la parabole; 34° Mémoire sur les propriétés de l'hyperbole; 35° Mémoire sur la relation qui existe entre la (longueur) des heures temporaires et la hauteur correspondante (du pôle — voici cette relation : Désignant la longueur de l'heure temporaire par t, on aura $\cos \{6\ t\} = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta$); 36° Mémoire sur la nature des ombres (gnomoniques — ou bien des tangentes et cotangentes trigonométriques); 37° Mémoire prouvant que la partie visible du ciel est plus grande que la moitié du ciel; 38° Mémoire sur la solution d'un doute sur un endroit du premier livre de l'Almageste, qui avait présenté des difficultés à plusieurs savants; 39° Mémoire sur la solution d'un doute sur la partie stéréométrique de l'ouvrage d'Euclide; 40° Mémoire sur la division des deux quantités de grandeur différente mentionnées dans la première proposition du dixième livre de l'ouvrage d'Enclide (le théorème d'exhaustion); 41° Problèmes sur les changements optiques; 42° Mémoire sur la détermination du côté de l'heptagone; 43° Mémoire sur la section de la ligne employée par Archimède, dans son Traité de la sphère et du cylindre (voir l'addition A du présent opuscule); 44° Mémoire sur la détermination de la méridienne au moyen d'une seule ombre (l'ombre observée donne la hauteur du soleil, laquelle étant connue, le problème se ramène à la formule $\cos A = \dfrac{\sin h \sin\varphi - \sin\delta}{\cos h \cos\varphi}$); 45° Mémoire sur le problème d'inscrire un pentagone à un carré; 46° Mémoire sur la voie lactée; 47° Mémoire sur la détermination du côté du cube (probablement une construction d'équations cubiques); 48° Mémoire sur la lumière des étoiles; 49° Mémoire sur les traces qu'on remarque dans la lune; 50° Mémoire sur un problème arithmétique; 51° Mémoire sur les nombres harmoniques; 52° Mémoire sur le mouvement qui a lieu dans le plan; 53° Mémoire sur l'analyse et la synthèse; 54° Mémoire sur les connues (c'est l'ouvrage qu'a fait connaître M. Sédillot); 55° Mémoire sur la solution d'un doute sur le douzième livre de l'ouvrage d'Euclide; 56° Mémoire sur la solution des difficultés présentées par le premier livre de l'ouvrage d'Euclide; 57° Mémoire sur le calcul des deux fausses positions; 58° Réponse à un problème de mesure; 59° Abrégé sur l'azimut de la Kiblah; 60° Mémoire sur la lumière; 61° Mémoire sur le mouvement complexe (?); 62° Mémoire pour réfuter ceux qui étaient d'une opinion contraire au sujet de la voie lactée (comparer le catalogue de la bibliothèque de Leyde, n° 1159); 63° Mémoire sur la solution des doutes sur le mouvement complexe; 64° Mémoire sur les doutes sur Ptolémée; 65° Mémoire sur l'atome; 66° Mémoire sur les lignes horaires; 67° Mémoire sur le قرسطون (?) (il faut peut-être lire قرطيون, voir le Recueil de termes techniques donné par M. Sédillot à la fin de son Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes); 68° Mémoire sur l'espace; 69° Mémoire sur la détermination des hauteurs perpendiculaires des montagnes; 70° Mémoire sur les démonstrations (c'est dans ce sens qu'on trouve employé le mot علة par Moh. Ben Moûça) du calcul indien; 71° Mémoire sur les hauteurs des triangles (traité de trigonométrie plane?); 72° Mémoire sur les propriétés des cercles; 73° Mémoire sur la proposition des Bénî Moûça; 74° Mémoire sur la construction de l'heptagone inscrit au cercle; 75° Mémoire sur la détermination de la hauteur du pôle avec la plus grande exactitude (la bibliothèque de Leyde possède ce mémoire, dont voici les premières lignes : « Traité d'Alhaçan Ben Alhoçaïn Ben Alhaïtham sur la détermination de la hauteur du pôle avec la plus grande exactitude. Il n'y a pas une seule des théories astronomiques qui se rapportent à l'observation qui n'ait besoin, dans les observations qu'elle comporte, de la détermination de l'élévation du pôle sur

vers lui! Seulement, cette construction est assez difficile; de sorte que nous ne pouvons l'ajouter au présent traité (*). — Et de

---

l'horizon du lieu de l'observation, et c'est uniquement au moyen des instruments, et après avoir déterminé exactement la position des instruments relativement à l'horizon, qu'on peut venir à bout de reconnaître les mouvements célestes; mais on ne peut obtenir cette détermination de la position de l'instrument, relativement à l'horizon, qu'au moyen d'une connaissance exacte de la hauteur du pôle, etc. »); 76° Mémoire sur la construction des clepsydres; 77° Mémoire sur la sphère ardente (le ms. d'Ibn Abî Oçaïb. porte الكرة المخرقة, le ms. du Târ. Alhoq. et Casiri, الكرة المحرقة; peut-être faudrait-il lire الكرة المحركة, de Sphæra mota, sujet d'un ouvrage d'Autolycus, traduit par Thâbit Ben Korrah; comparer le n° 1096 du catalogue de la bibliothèque de Leyde); 78° Mémoire sur un problème arithmétique solide; 79° Mémoire sur un problème géométrique; 80° Mémoire sur la figure de l'éclipse; 81° Mémoire sur la plus grande ligne qu'on peut placer dans un segment de cercle; 82° Mémoire sur le mouvement de la lune; 83° Mémoire sur les problèmes d'intersection; 84° Commentaire sur l'arithmétique en forme de scolies; 85° Commentaire du canon (Euclide, sectio canonis?) en forme de scolies; 86° Commentaire sur l'harmonique (d'Euclide?) en forme de scolies; 87° Traité de la section du trapèze en général; 88° Mémoire sur l'éthique; 89° Mémoire sur les connaissances nécessaires aux gens de bureau; 90° Traité de politique, cinq livres; 91° Scolies ajoutées par le médecin égyptien Ishâk Ben Yoûnis (ce pourrait bien être le célèbre astronome de ce nom, si ce n'est que celui-ci s'appelait Ali et non pas Ishâk) à l'ouvrage d'Ibn Alhaïtham sur le Traité des problèmes d'algèbre de Diophante; 92° Mémoire sur la solution d'un problème arithmétique.

On doit à M. *L. Am. Sédillot* la connaissance du *Traité des connues géométriques* d'Ibn Alhaïtham, mentionné ci-dessus, n° 54. Voir le nouveau Journal asiatique, mai 1834, et l'Aperçu historique, etc., de M. *Chasles*, pag. 498 sqq.

Pour donner une idée de ce qu'étaient les ouvrages du genre de celui mentionné ci-dessus n° 89, voici une indication rapide du contenu d'un ouvrage d'*Aboûl Wafâ*, dont la bibliothèque de Leyde possède la première moitié (n° 1048 du catalogue); il est intitulé Traité d'Aboûl Wafâ Mohammed Ben Mohammed Alboûzdjâni, sur les connaissances nécessaires aux gens de bureau et aux gens d'affaires et autres, en fait de l'art du calcul. Le *premier livre* traite : Du rapport, des différentes espèces de fractions (comparer le deuxième chapitre, première préparation, du petit traité de Behâ-Eddin), et de la règle des six quantités (comparer *Chasles*, Aperçu hist., not. VI); le *deuxième livre :* De la multiplication et de la division des nombres entiers et des fractions simples ou composées, de l'addition et de la soustraction des fractions, de la multiplication et de la division abrégées; le *troisième livre :* De la mesure des figures planes et de la mesure des distances. C'est jusque-là que va le ms. de la bibliothèque de Leyde. D'après le sommaire, le *quatrième livre* traite des différents genres d'impôts, de la tenue des registres d'impôts, et des calculs qui s'y rapportent; le *cinquième livre*, de l'échange des troupeaux de chameaux, des blés et des terres, particulièrement par rapport au territoire de Baçrah et de Qoûfah et aux contrées environnantes, puis des partages; le *sixième livre*, du commerce de change d'or et de pièces monnayées, du payement des troupes, des bijoux, des vêtements, des associations mercantiles; le *septième livre*, des calculs que nécessitent les différents genres d'opérations mercantiles. Chaque livre est divisé en sept chapitres, et chaque chapitre en un nombre plus ou moins grand (1 jusqu'à 9) de sections.

*) Il serait intéressant de connaître cette construction d'une équation du cinquième degré

même lorsqu'on dit (*) : « Quel cube est égal à un certain nombre de parties du carré de son côté, » on a besoin de la susdite proposition auxiliaire, et il est impossible de résoudre le pro- 45
blème au moyen de nos méthodes. — En général, lorsque le premier de ces sept degrés est multiplié par le sixième (**), on aura besoin de la détermination de quatre moyennes proportionnelles entre deux lignes données, ainsi que l'a démontré Aboû Alî Ibn Alhaïtham : que Dieu le Très-Haut soit miséricordieux envers lui !

Et si l'on dit (***) : « Quel cube est égal à seize parties de son côté ? » le premier degré sera multiplié par le (dénominateur du) cinquième, et la racine de la racine du produit sera le côté du cube cherché. Et la même règle s'appliquera toujours lorsqu'un de ces sept degrés est égalé à celui qui, à partir de lui, est le cinquième de la proportion continue (****).

---

par un géomètre arabe, à moins que ce ne soit une simple reproduction du procédé imaginé par Ératosthène. (Voir *Archimède*, éd. d'Oxf., p. 144-146.)

*) $x^3 = a \cdot \frac{1}{x^2}$

**) $x^3 \cdot \frac{1}{x^2}$; c'est à quoi conduit, en effet, la méthode employée par l'auteur dans les exemples précédents, lorsqu'elle est appliquée à l'équation $x^3 = a \cdot \frac{1}{x^2}$; car, suivant cette méthode, on multipliera les deux membres par x^3, ce qui donne $x^6 = a \cdot x^3 \frac{1}{x^2} \cdot = a \cdot x$ ou $x^5 = a$. Cependant il semble que l'auteur, en se servant de l'expression « le premier degré est multiplié par le sixième, » veut désigner un degré qui est multiplié par *le dénominateur* de celui qui, *à partir du premier*, est le sixième dans l'ordre de la proportion continue des sept degrés ; à savoir x^3 par x^2 le dénominateur de $\frac{1}{x^2}$, et x^2 par x^3 le dénominateur de $\frac{1}{x^3}$; de sorte que l'opération à effectuer sur l'équation proposée sera : 1° $x^3 = a \frac{1}{x^2}$, $x^3 \cdot x^2 = a \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^2$ ou $x^5 = a$; 2° $x^2 = a \frac{1}{x^3}$, $x^2 \cdot x^3 = a \cdot \frac{1}{x^3} \cdot x^3$ ou $x^5 = a$. C'est du moins ainsi qu'il faut indubitablement entendre les expressions de l'exemple suivant proposé dans le texte.

***) $x^3 = 16 \cdot \frac{1}{x}$, $x^3 \cdot x = 16 \cdot \frac{1}{x} x = 16$, $x = \sqrt{\sqrt{16}}$.

****) $x^3 = a \frac{1}{x}$, $x^2 = a \cdot \frac{1}{x^2}$, $x = a \cdot \frac{1}{x^3}$.

La totalité des équations ayant lieu entre ces sept degrés, et résolubles au moyen des méthodes exposées par nous, monte

---

$$\frac{1}{x^5} = ax, \quad \frac{1}{x^2} = ax^7, \quad \frac{1}{x} = ax^8,$$
$$\left(\frac{1}{x^5} = ax^2, \quad \frac{1}{x^2} = ax^3 \ldots \text{équations d'Ibn Alhaïtham}\right)$$
$$\frac{1}{x^3} = ax^5.$$

Équations composées.

II. *Équations du second degré* (« résolubles au moyen des propriétés du cercle »).

Équations à termes entiers, n° 7 à 12. $x^2 + bx = a$, $x^2 + a = bx$, $bx + a = x^2$,
$x^3 + cx^2 = bx$, $x^3 + bx = cx^2$, $cx^2 + bx = x^3$.

Équations à termes fractionnaires. $\frac{1}{x} + a = bx$, $\frac{1}{x} + bx = a$, $\frac{1}{x} = a + bx$,
$\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} = b$, $\frac{1}{x^2} + b = \frac{a}{x}$, $\frac{1}{x^2} = \frac{a}{x} + b$,
$\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} = \frac{b}{x}$, $\frac{1}{x^3} + \frac{b}{x} = \frac{a}{x^2}$, $\frac{1}{x^3} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$.

III. *Équations du troisième degré à trois termes* (« rés. au moy. des propr. des coniq. »)

Équations à termes entiers, n° 13 à 18. $x^3 + bx = a$, $x^3 + a = bx$, $bx + a = x^3$,
$x^3 + cx^2 = a$, $x^3 + a = cx^2$, $cx^2 + a = x^3$.

Équations à termes fractionnaires. $\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x} = b$, $\frac{1}{x^3} + b = \frac{a}{x}$, $\frac{1}{x^3} = \frac{a}{x} + b$,
$\frac{1}{x^2} + a = bx$, $\frac{1}{x^2} + bx = a$, $\frac{1}{x^2} = a + bx$,
$\frac{1}{x} + ax = bx^2$, $\frac{1}{x} + bx^2 = ax$, $\frac{1}{x} = ax + bx^2$,
$\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} = b$, $\frac{1}{x^3} + b = \frac{a}{x^2}$, $\frac{1}{x^3} = \frac{a}{x^2} + b$,
$\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} = bx$, $\frac{1}{x^2} + bx = \frac{a}{x}$, $\frac{1}{x^2} = \frac{a}{x} + bx$,
$\frac{1}{x} + a = bx^2$, $\frac{1}{x} + bx^2 = a$, $\frac{1}{x} = a + bx^2$.

IV. *Équations du troisième degré à quatre termes* (« rés. au moy. des propr. des coniq. »)

Équations à termes entiers, n° 19 à 25. $x^3 + cx^2 + bx = a$, $x^3 + cx^2 + a = bx$,
$x^3 + bx + a = cx^2$, $cx^2 + bx + a = x^3$,
$x^3 + cx^2 = bx + a$, $x^3 + bx = cx^2 + a$, $x^3 + a = cx^2 + bx$.

Équations à termes fractionnaires. $\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} = c$, $\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} + c = \frac{b}{x}$,
$\frac{1}{x^3} + \frac{b}{x} + c = \frac{a}{x^2}$, $\frac{1}{x^3} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$,
$\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} = \frac{b}{x} + c$ $\frac{1}{x^3} + \frac{b}{x} = \frac{a}{x^2} + c$, $\frac{1}{x^3} + c = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$,

donc à quatre-vingt-six, dont il a été mentionné dans les traités de mes prédécesseurs uniquement six espèces (*). Pour quiconque a bien approfondi les théorèmes proposés dans ce traité, et en même temps possède une certaine force naturelle de l'intelligence, ainsi que l'habitude de s'occuper de problèmes mathématiques, il n'y aura plus, certes, rien d'obscur dans les problèmes qui offraient de si grandes difficultés aux géomètres des temps précédents.

Nous voilà donc arrivés au terme convenable pour finir ce mémoire en offrant nos louanges au Dieu Très-Haut, et en implorant sa bénédiction sur tous les prophètes.

C'est ce que je m'étais proposé de développer. 47

Or, cinq ans environ après la composition de ce mémoire, une personne possédant une légère teinture de connaissances mathématiques me raconta que le géomètre Aboûl Djoûd

---

$$\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}+b=cx,\quad \frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}+cx=b,$$

$$\frac{1}{x^2}+b+cx=\frac{a}{x},\quad \frac{1}{x^2}=\frac{a}{x}+b+cx,$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=b+cx,\quad \frac{1}{x^2}+b=\frac{a}{x}+cx,\quad \frac{1}{x^2}+cx=\frac{a}{x}+b,$$

$$\frac{1}{x}+a+bx=cx^2,\quad \frac{1}{x}+a+cx^2=bx,$$

$$\frac{1}{x}+bx+cx^2=a,\quad \frac{1}{x}=a+bx+cx^2,$$

$$\frac{1}{x}+a=bx+cx^2,\quad \frac{1}{x}+bx=a+cx^2,\quad \frac{1}{x}+cx^2=a+bx.$$

Il est remarquable que l'auteur n'ait pas été frappé par la pensée qu'on peut produire un nombre *infini* d'équations « résolubles par ses méthodes » en multipliant chacune de ses vingt-cinq (ou plutôt en rejetant les équations n°s 4 à 6, et 10 à 12, dix-neuf) équations primitives par $x^{\pm n}$, n étant un nombre entier quelconque. Ce sont probablement ses théories philosophiques sur la nature des puissances (voir pages 7 et 8) qui l'empêchaient de concevoir cette idée.

*) A savoir, les espèces n°s 1, 2, 4, 7, 8, 9. — Voir les traités de Moh. Ben Moûça et de Behâ Eddîn, et comparer le passage d'Ibn Khaldoûn cité par Hadji-Khalfa (éd. de Fluegel, t. II, page 584).

Mohammed Ben Allaïth, que Dieu soit miséricordieux envers lui! était auteur d'un traité sur l'énumération de ces espèces, et sur la manière de ramener au moyen de l'analyse la plupart d'entre elles à des sections coniques, sans cependant discuter complétement leurs cas et sans distinguer les problèmes possibles d'avec les impossibles, mais en donnant seulement les développements auxquels il était conduit par la considération de problèmes particuliers dépendant de ces espèces. Je ne serais pas porté à croire cela très-loin de la vérité, parce que les deux espèces que j'ai dit appartenir à un de mes prédécesseurs lui sont attribuées. Et la personne dont j'ai parlé les avait vues dans un exemplaire complet des ouvrages d'Aboûl Djoûd, écrit de la main d'Alhâzemî (*) le Khârezmien.

L'une de ces deux espèces est trinôme, à savoir: « Un cube « et un nombre sont égaux à des carrés (**). » Cette équation a des cas, et les cas sont sujets à des conditions, ainsi qu'il a été expliqué dans ce mémoire. Mais d'abord il n'a pas énoncé complétement les conditions, et ensuite il s'est trompé de nouveau à l'occasion de cette espèce en affirmant que, si le côté du cube égal au nombre donné est plus grand que la moitié du nombre des carrés, le problème est impossible. Car il n'en est pas ainsi, comme nous l'avons démontré. Il fut induit dans cette erreur, faute d'avoir reconnu la possibilité du contact ou de l'intersection des deux coniques dans cet autre cas.

L'autre espèce est quadrinôme, à savoir: « Un cube plus un « nombre plus des côtés est égal à des carrés (***); » et certes rien de plus beau que sa solution de ce problème après que tous les géomètres s'étaient épuisés en vains efforts pour l'obtenir.

---

*) Voir le *Loub Alloubâb* du Soyoûti, éd. de Veth, vol. I, p. V۴.

**) C'est l'équation n° 17 d'Alkhayyâmi. Voir page 40 sqq.

***) C'est l'équation n° 21 d'Alkhayyâmi. Voir page 49 sqq.

Cependant le problème qu'il résolut était particulier, et l'espèce a différents cas et est sujette à des conditions; enfin elle renferme des problèmes impossibles. De tout cela il ne donna pas une discussion exacte et complète.

J'ai parlé de cela uniquement afin que les personnes qui rencontreraient les deux traités — pourvu que ce qui m'a été raconté relativement à cet excellent géomètre soit exact — puissent comparer mon mémoire présent avec celui attribué à cet excellent géomètre. 48

Or, je crois n'avoir négligé aucun soin pour rendre ma discussion complète, m'efforçant en même temps de satisfaire pleinement à ma promesse, et d'éviter pourtant une prolixité ennuyeuse. Si j'avais voulu, j'aurais facilement pu donner des exemples de chacune de ces espèces et de leurs cas. Mais, craignant d'être prolixe, je me suis borné à proposer ces théorèmes généraux, confiant en l'intelligence de l'étudiant, parce que celui dont l'esprit a bien pénétré l'idée de cet ouvrage ne sera certainement pas arrêté par tel problème spécial qu'il voudra se proposer, ou par la difficulté de le ramener à l'espèce dont il est le cas particulier. C'est le concours de Dieu qui conduit au succès, et c'est en son assistance que nous nous confions en tout état.

J'ajoute encore ce qui suit. Un de nos élèves nous a pressé de ses instances d'exposer l'erreur (*) commise par Aboûl Djoûd Mohammed Ben Allaïth dans la discussion de la cinquième des six espèces trinômes résolubles au moyen des coniques. C'est l'équation « Un cube et un nombre sont égaux à des carrés (**). »

Aboûl Djoûd dit : Faisons le nombre des carrés égal à la

*) Cette erreur consiste à avoir dit (fig. 30) :

1° Que si BC = CA, les deux coniques se touchent au point D;

2° Que si BC > CA, les deux coniques n'ont pas de rencontre du tout. (Voir pages 43 et 82.)

**) N° 17. $x^3 + a = cx^2$.

ligne AB (fig. 30), et prenons sur AB un segment BC égal au côté d'un cube qui est égal au nombre. La ligne BC sera, ou égale à CA, ou plus grande, ou plus petite que CA.

Il dit : Lorsque CA est égale à BC (fig. 30, 1), complétons le rectangle CE, et faisons passer par D une hyperbole ayant AB, BE pour asymptotes. Construisons aussi une parabole ayant son sommet au point A, son axe sur AB, et son paramètre égal à BC. Cette parabole passera infailliblement par le point D, comme nous l'avons démontré. Puis il dit que les deux coniques se touchent au point D. Mais c'est une erreur, parce qu'elles ont nécessairement une intersection. Démonstration. Faisons BZ égale à BA, et joignons AZ. Alors AZ passe infailliblement par D, et sera située (relativement à sa partie AD) dans l'intérieur de la parabole. L'angle ADB sera un angle droit, et l'angle ABD sera égal à l'angle ZBD. Or il est connu que l'axe de l'hyperbole divise en deux parties égales l'angle (des asymptotes) qui l'enveloppe. Conséquemment la ligne BDT est l'axe de l'hyperbole qui passe par D. Mais la ligne AD est parallèle
49 aux ordonnées (de l'hyperbole); elle sera donc tangente à l'hyperbole. Il s'ensuit nécessairement que la parabole coupe l'hyperbole, ne pouvant être située entre l'hyperbole et la tangente à l'hyperbole; parce que si la parabole touchait cette tangente à l'hyperbole, les droites menées du point D à un point quelconque pris sur la circonférence parabolique AD tomberaient entre la parabole et sa tangente, ce qui est absurde.

$AB = c$, $\overline{BC}^{3} = a$, $BC < AB$.

$BC \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} AC$, ou $\sqrt[3]{a} \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} \frac{c}{2}$. — BCDE carré.

AB, BE, asymptotes d'une hyperbole équilatère qui passe par le point D.

A sommet, AB axe, BC paramètre d'une parabole.

1) BC = AC (fig. 30, 1). La parabole passe par D (voir la note page 41), et les deux sections coniques se rencontrent en D, non par contact, mais par intersection.

Il en résulte avec nécessité que la parabole coupe l'hyperbole encore dans un autre point situé entre A et D. Et c'est ce que nous nous proposions de démontrer. C'est ainsi que ce géomètre excellent s'est trompé en avançant que les deux coniques nécessairement ont un contact au point D.

Maintenant quant à ces mots : « Lorsque BC est plus grande que CA, le problème est impossible, parce que les deux coniques ne se rencontrent pas, » c'est une assertion erronée. Au contraire, les deux coniques peuvent très-bien se rencontrer, soit par intersection, soit par contact, en un seul point ou en deux points, situés entre A et D, ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus. Et l'on peut en donner une démonstration plus générale que celle que nous avons proposée.

Que AB (fig. 30, 2) soit égale au nombre des carrés, et BC égale au côté du cube (qui est égal au nombre donné) et plus grande que la moitié de AB. Complétons CE, et décrivons les deux coniques de la manière qu'on sait. Supposons (*) AB égale à dix, et ZB égale à six. Le produit du carré de ZB en ZA sera cent quarante-quatre. Ce sera le nombre donné; le

---

*) 2) $BC > AC$ ou $BC > \frac{AB}{2}$ (fig. 30, 2). — Supposons $AB = c = 10$, $ZB = x = 6$; de $x^3 + a = cx^2$ il suit $a = x^2(c - x) = \overline{ZB}^2 . ZA = 144$; $BC = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{144} > 5$, ou $BC > \frac{AB}{2}$.

De $\overline{BC}^3 = \overline{ZB}^2 . ZA$ il suit : 1) $\overline{ZB}^2 : \overline{BC}^2 = BC : ZA$.
Coupant l'hyperbole au point H par une perpendiculaire élevée au point Z, on aura rectangle HB égal au carré EC, donc 2) $ZB : BC = BC : ZH$
et 3) $\overline{ZB}^2 : \overline{BC}^2 = ZB : ZH$
De 1) et 3) il suit 4) $ZB : BC = ZH : ZA$
de 2) et 4) 5) $BC : ZH = ZH : ZA$ ou $\overline{ZH}^2 = BC . ZA$;
enfin de 4) et 5) $ZB : BC = BC : ZH = ZH : ZA$.
Or, de $\overline{ZH}^2 = BC . ZA$ il résulte que H est situé aussi sur la circonférence de la parabole, bien que nous ayons supposé $BC > \frac{AB}{2}$ ou $BC > AC$. Conséquemment l'assertion d'Aboûl Djoûd qu'en ce cas les deux coniques *ne se rencontrent pas*, est erronée. — L'autre racine positive est, dans l'exemple présent, $x = 2 + \sqrt{28}$.

côté (du cube qui lui est égal) sera BC, et BC sera infailliblement plus grand que cinq, parce que le cube de cinq est cent vingt-cinq. Or le solide ayant pour base le carré de ZB, et pour hauteur ZA, est égal au cube de BC. Conséquemment leurs bases sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, c'est-à-dire le carré de ZB est au carré de BC comme BC à ZA. Menons de Z une perpendiculaire qui coupera l'hyperbole au point H, et complétons le rectangle HB. Le rectangle HB sera égal à CE. Conséquemment leurs côtés seront réciproquement proportionnels, c'est-à-dire ZB sera à BC comme BC à ZH. Donc le carré de ZB sera au carré de BC comme ZB à ZH. Mais on avait trouvé le carré de ZB au carré de BC comme BC à ZA; par conséquent ZB à ZH comme BC à ZA, et *alternando* (*) (ZB à BC comme ZH à ZA). Il en résulte que les quatre lignes ZB, BC, ZH, ZA sont en proportion continue, et que le carré de ZH est égal au produit de BC en ZA. Mais BC est le paramètre de la parabole dont AB est l'axe et A le sommet; conséquemment ZH est ordonnée de cette parabole, et le point H sera alors infailliblement situé sur sa circonférence. Mais H était déjà situé sur la circonférence de l'hyperbole. Les deux coniques se rencontrent donc; et l'erreur d'Aboûl Djoûd, lorsqu'il dit qu'elles ne se rencontrent pas, est évidente. Or, c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Afin d'éclaircir encore plus cette question, supposons (**) AB

---

*) Voir *Euclide*, Éléments, liv. V, déf. 13.

**) (Fig. 30, 3) $AB = c = 80$, $BC = \sqrt[3]{a} = 41$, $AC = AB - BC = 39$, $BC > AC$.
$CD = BC$, donc $\overline{CD}^2 > BC \cdot AC$; conséquemment D est situé en dehors de la parabole.
$\overline{LC}^2 = BC \cdot AC = 1599$, $LC = \sqrt{1599} = 40 - \varepsilon$, où $\varepsilon < \frac{1}{80}$.
$TC = BC = 41$, $AT = 2$; $HB = BT$... HT tangente à l'hyperbole;
$AK = \frac{AC}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$; MK perpendiculaire à AK.
$\overline{LC}^2 : \overline{MK}^2 = AC : AK = 4$, $MK = \frac{LC}{2} = 20 - \varepsilon'$, où $\varepsilon' < \frac{1}{160}$.

(fig. 30, 8) égale à quatre-vingts, et BC qui représente le côté du cube qui est égal au nombre donné, égale à quarante et un, de sorte qu'elle sera plus grande que AC. Le point D tombera en dehors de la parabole. Que celle-ci passe donc par le point L. Alors la ligne LC sera égale à la racine de mille cinq cent quatre-vingt-dix-neuf, ce qui fait quarante moins une petite quantité. Faisons TC égale à CB, BH égale à BT, et joignons TH. Alors TH sera tangente à l'hyperbole, comme nous l'avons démontré. Prenons un segment AK égal à un quart de AC, et menons de K une perpendiculaire qui coupera la parabole au point M. Le carré de LC sera au carré de KM comme AC à AK, parce que les deux premières lignes sont ordonnées de la parabole; c'est ce qui a été démontré par Apollonius dans la 19e proposition du premier livre (*). KM sera donc la moitié de LC, c'est-à-dire égale à vingt, moins une petite quantité. Or, CT est quarante et un, AK neuf et trois quarts, et AT deux (**); conséquemment KZ sera onze et trois quarts, parce que KZ est à KT comme HB à BT; mais les deux dernières lignes sont égales. Il en résulte que la ligne ZM sera plus grande que huit, ce qui est compté à partir de

---

$KZ : KT = HB : BT$, donc $KZ = KT = KA + AT = 11\frac{3}{4}$.

$ZM = MK - KZ = 8\frac{1}{4} - \varepsilon' > 8$.

L'abscisse KN de l'hyperbole qui correspond à KM sera égale à $\frac{\overline{BC}^2}{BK} = \frac{\overline{BC}^2}{AB - AK} = 23{,}93$; donc KN > KM, de sorte qu'ici les deux coniques sont situées en dehors l'une de l'autre. Mais, en effet, on ne voit pas bien pour quel motif l'auteur a supposé $AK = \frac{AC}{4}$; car s'il avait donné à K une valeur comprise entre 17,8 et 36,6, il aurait nécessairement trouvé que l'hyperbole passe dans l'intérieur de la parabole, et *vice versa*, ainsi que le montre la figure dans le tracé de laquelle les données numériques du texte ont été rigoureusement observées.

*) Éd. d'Oxf., p. 46, liv. I, prop. 20.

**) J'ai laissé subsister dans le texte la leçon *ithnâni*, comme se trouvant également dans les deux mss.; mais il vaudrait mieux lire *ithnaïni*.

la tangente à l'hyperbole; et ce sera dans cette position infailliblement en deçà de l'hyperbole; de sorte qu'on serait forcé d'avouer que les deux coniques ne se rencontrent pas lorsque BC est plus grande que CA. Mais il n'en est pas ainsi nécessairement dans tous les cas, et Aboûl Djoûd s'est trompé dans
51 cette assertion. Remarquez cela. Si on veut, on peut facilement en trouver des exemples numériques.

Ce problème revient en vérité à celui d'appliquer à une ligne donnée (c) un solide ($\{c-x\}\ x^2$) défaillant d'un cube (x^3), et égal à un autre solide donné (a) (*). Alors, si le côté ($\sqrt[3]{a}$) du cube, qui est égal au solide donné, est égal à la moitié $\left(\frac{c}{2}\right)$ de la ligne, ou plus petit, la construction est nécessairement possible; mais lorsque ledit côté est plus grand que la moitié de cette ligne, le problème peut conduire à des cas impossibles, conformément à ce que nous avons exposé.

C'est Dieu qui facilite la solution de ces difficultés par ses bienfaits et par sa générosité.

Terminé (**), à midi, le premier jour de la semaine, le vingt-troisième du mois Rabîa premier de l'an six cent.....

---

*) Comparer l'addition B. — C'est peut-être cette analogie qui existe entre la construction de l'équation $x^3+a=cx^2$ et la 28me proposition du VIme livre des Éléments d'Euclide (ou, si l'on veut, l'équation carrée $x^2+a=bx$) qui a causé l'erreur d'Aboûl Djoûd relativement à la limite de la solubilité. Car dans cette dernière proposition cette limite, en effet, a lieu lorsque la racine (carrée) de la surface donnée est égale à la moitié de la ligne donnée, en supposant que le parallélogramme appliqué doive être défaillant d'un carré.

**) A savoir la copie. — Quant au millésime qui est indiqué dans le manuscrit par un parafe difficile à déchiffrer, j'en ai inséré dans le texte un fac-similé gravé, pour ne pas hasarder une explication conjecturale.

ADDITIONS.

A

« Mémoire d'Ibn Alhaïtham, c'est-à-dire du chaïkh Aboûl Haçan Ben Alhaçan Ben Alhaïtham sur la section d'une ligne employée par Archimède dans le second livre. »

« Il dit : Archimède employa, dans la quatrième proposition du second livre du Traité de la sphère et du cylindre, une ligne qu'il suppose divisée suivant une raison particulière, sans démontrer comment on divise cette ligne suivant cette raison. Et puisque la section de cette ligne ne peut être effectuée qu'au moyen des sections coniques, et qu'il n'employa dans son ouvrage rien des sections coniques, il ne s'avisa pas de mêler au traité ce qui était étranger à son sujet. Nous avions donc admis cette section d'une ligne, en présupposant qu'elle peut être effectuée. Mais tant que nous ne divisons pas effectivement la ligne suivant la raison donnée par Archimède, la démonstration de la proposition dans laquelle cette section fut employée par lui reste incomplète. Puisque donc il en est ainsi, nous nous sommes proposé d'effectuer cette section et d'en montrer la possibilité, afin de rendre évidente la justesse du procédé d'Archimède. »

« La section employée par Archimède consiste en ce qu'il donne une ligne, et sur cette ligne deux points D, Z (fig. 31). Il suppose que les deux distances DB, BZ, sont connues, ainsi que le rapport de BZ à BT. Puis il dit : Faisons maintenant le rapport de HZ à ZT égal au rapport du carré de BD au carré de DH. »

« Déterminons donc la ligne au moyen de ces données, et occupons-nous de sa section. »

J'ai traduit textuellement cette petite introduction, puisque les paroles du célèbre géomètre arabe ne sont pas sans une certaine valeur historique. Pour la solution même qui suit, je ne vais en donner qu'un exposé succinct, afin de ne pas fatiguer le lecteur par la prolixité des démonstrations anciennes adoptée par les Arabes.

Faisons AD, ET, CZ, égales à BD et perpendiculaires à DZ, et joignons les points A, E, C, qui sont en ligne droite.

Faisons passer par E une *hyperbole* ayant CZ, ZD pour asymptotes. Elle coupera AD en un point K situé entre A et D.

Puis construisons une *parabole* dont l'axe soit DA, le sommet D, et le paramètre DB. Elle coupera AC en un point S, en sorte qu'on aura $\overline{AS}^2 = AD \cdot BD = \overline{BD}^2$, donc AS=BD. Et puisque AE = DT > DB (*), on aura AE > AS.

E sera donc situé en dehors de la parabole, tandis que K, comme point de son axe, sera situé dans l'intérieur de la parabole. Il s'ensuit que l'hyperbole et la parabole ont une intersection.

Abaissons du point d'intersection M une perpendiculaire sur DZ; le pied H de cette perpendiculaire sera le point cherché.

Car, en menant par le point M une droite NML parallèle à DZ, on aura, en vertu de la parabole, $\overline{MN}^2 = BD \cdot DN$, ou $\overline{DH}^2 = BD \cdot MH$, donc 1) $\overline{BD}^2 : \overline{DH}^2 = BD : MH$.

Puis, en vertu de l'hyperbole, on a ML : EC = ET : MH, ou 2) HZ : ZT = BD : MH.

---

*) Puisque BZ > ZT, voir *Archimède*, éd. d'Oxf., p. 158, lig. 26 du texte grec.

Mais de la combinaison de 1) et 2) il suit :

$$HZ : ZT = \overline{BD}^2 : \overline{DH}^2; \quad \text{c. q. f. d.}$$

On peut voir la même chose d'un seul coup d'œil. Désignant DB, TZ, DZ, DH par a, b, c, x respectivement, et prenant D pour origine des coordonnées, l'équation de l'hyperbole sera $y.(c-x)=a.b$, celle de la parabole $x^2 = y.a$, et la combinaison de ces deux équations donne $x^2(c-x)=a^2.b$, ce qui est en effet l'équation qu'il s'agissait de construire. (Voir la préface.)

A la suite du mémoire d'Ibn Alhaïtham il se trouve une autre solution du même problème, précédée de ces mots : « D'une autre manière par un autre, au moyen du mouvement de la ligne. » Elle m'a paru mériter une attention particulière, comme solution *mécanique* d'un problème de géométrie; et encore parce qu'elle prouve, comme on verra, combien les Arabes ont su pénétrer dans l'esprit des méthodes grecques, et s'en faire des instruments qu'ils maniaient habilement. Voici le procédé du géomètre arabe :

Menant des points D et Z (fig. 32) deux perpendiculaires à la ligne DZ, il prend sur la première un segment DA égal à BD, et sur le prolongement de DZ un segment ZC égal à ZT. Puis il imagine deux droites pivotant autour des points A et C en restant constamment parallèles entre elles : la première de ces droites mobiles coupera constamment la droite DZ; la seconde coupera la perpendiculaire menée du point Z; la droite qui joint les deux points d'intersection changera de position avec les droites mobiles, et renfermera avec elles des angles variables. Qu'on fixe entre toutes les positions que prend successivement le système de ces trois droites mobiles, celle dans laquelle la troisième droite qui joint les points d'intersection est perpendiculaire aux deux parallèles mobiles. Le point d'intersec-

tion H de la première droite mobile avec la droite fixe DZ, qui répond à cette position, sera celui qu'il s'agissait de trouver. Car on aura AD:DH = HZ:ZE; donc $\overline{AD}^2 : \overline{DH}^2 = \overline{HZ}^2 : \overline{ZE}^2$ = HZ : ZC; mais AD = BD et ZC = ZT; donc $\overline{BD}^2 : \overline{DH}^2 =$ = HZ:ZT; c. q. f. d.

Examinons cette solution. Désignons comme ci-dessus BD, TZ, DZ, DH par a, b, c, x respectivement; il s'agit de construire l'équation

$$1) \quad x^3 - cx^2 + a^2.b = 0.$$

La construction du géomètre arabe revient virtuellement à ceci : de construire la courbe lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées du point C sur toutes les tangentes d'une parabole dont A est le foyer, et DC la tangente au sommet; puis de couper cette courbe par une droite perpendiculaire à DC au point Z. En d'autres termes, prenant le point C pour origine des coordonnées, on combine la courbe

$$I) \quad y^3 + x'^2y - (b+c)x'y + ax'^2 = 0$$

avec la droite $x' = b$, ce qui, lorsqu'au moyen de la relation $a : x = y : x' = y : b$, on introduit encore x en place de y, produit effectivement l'équation proposée.

Voici maintenant comment cette construction se rattache à celle donnée par *Platon* pour le problème des deux moyennes proportionnelles (*). La solution de Platon consiste en ce qu'on prend, sur les deux côtés d'un angle droit à partir du sommet B (fig. 33), deux segments BA, BΓ respectivement égaux aux deux lignes données, et que l'on trouve, à l'aide d'un instrument qu'il imagine pour cet effet, deux points E, Δ

*) *Archim.*, éd. d'Oxf., p. 135.

situés sur les prolongements de AB et de ΓB; de sorte que ΓEΔ et EΔA soient des angles droits.

Désignant BΓ par b, BE par y, BΔ par z, BA par a, on aura en effet $b : y = y : z = z : a$; donc on aura construit l'équation

$$2) \quad y^3 = a.b^2.$$

Mais évidemment cette construction revient à ceci : de construire la courbe lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées du point Γ sur toutes les tangentes de la parabole dont A est le foyer et BΓ la tangente au sommet; puis de couper cette courbe par le prolongement de la droite AB.

Cette courbe est donc la même que celle dont nous venons de parler. Prenant le point Γ pour origine des coordonnées, ce sera la courbe

$$II) \quad y^3 + x^2y - bxy - ax^2 = 0,$$

qui, combinée avec la droite $x = b$, produit $y^2 = ab^2$. En échangeant les directions positive et négative des y, les équations I) et II) deviennent identiques lorsque les paramètres $(b + c)$ et b sont les mêmes.

Le géomètre arabe s'est donc ingénieusement servi pour la construction de l'équation 1) des moyens imaginés par Platon pour celle de l'équation 2).

On a dit que la construction d'une équation cubique à l'aide d'une courbe du troisième degré renfermait une pétition de principe, en ce que la succession des points de ces courbes ne saurait être trouvée que par la résolution d'une équation cubique. Cette objection s'évanouit cependant à l'égard des courbes qu'on peut décrire à l'aide d'un instrument par un mouvement continu, et l'on peut dire en quelque sorte que c'est ce que virtuellement *Platon* du moins a fait. Rien n'est

plus facile que d'imaginer un pareil instrument pour la courbe qu'on vient d'examiner (*).

B

« Au nom de Dieu clément et miséricordieux!
« C'est en Dieu que repose ma confiance. »

« J'ai lu ce que tu as mentionné, ô mon frère, de ce qu'a dit le géomètre Aboû Abdallah Almâhânî dans le mémoire qui a pour objet de commenter le second livre du traité d'Archimède sur le cylindre, la sphère et le cône, à savoir que des neuf propositions qui composent ce livre, il réussit à en construire huit, tandis qu'il s'efforçait en vain de donner une solution parfaite de la quatrième, laquelle est la section d'une sphère en deux parties suivant une raison donnée, à cause de la difficulté du lemme dont il avait besoin pour cette solution. Il chercha alors à la résoudre par l'algèbre, et ramena le problème à une égalité du cube et des carrés à un nombre (**) (équation) dont les éléments ne sont pas proportionnels (***). Cela revient à appliquer à une ligne donnée un solide à côtés

---

*) En discutant l'équation I), on trouve que cette courbe a deux branches infinies, ayant pour asymptote commune la directrice de la parabole mentionnée ci-dessus, et dirigées de part et d'autre de cette asymptote. Elle forme au-dessus de l'axe CD (fig. 32) un nœud penché vers AD, et a un point double en C. Elle s'éloigne le plus de l'axe des abscisses aux deux points qui ont pour coordonnées $y = \frac{\pm d - a}{2}$, $x' = \frac{b+c}{2} \cdot \frac{\pm d - a}{\pm d + a}$, en posant $d^2 = a^2 + (b+c)^2$. Si le point fixe C, au lieu d'être pris sur la tangente au sommet, avait été pris sur la directrice de la parabole, la courbe aurait été une focale à nœud.

**) Cela n'est pas tout à fait exact; il fallait dire: « d'un cube et d'un nombre à des carrés. » Cependant il ne faut voir en ceci qu'un simple *lapsus calami*, une légère inadvertance, et non pas une erreur ou une incertitude. En effet, en parlant de choses aussi connues que l'étaient le lemme d'Archimède et l'équation d'Almâhânî, et encore en venant d'examiner un mémoire qui s'y rapportait, l'auteur pouvait se dispenser de parler avec cette rigoureuse exactitude qu'on mettrait à énoncer des théorèmes entièrement nouveaux.

***) C'est-à-dire ce n'est pas une équation du genre des équations n°s 10, 11, 12 du traité d'Alkhayyâmî, en sorte qu'on pourrait, en la divisant par x, la ramener à une équation carrée.

parallèles et défaillant d'un cube. Or j'ai eu besoin, pour effectuer ceci (*), de résoudre antérieurement un autre problème à la solution duquel on parvient sans difficulté, et que voici : »

« Étant données deux lignes AB et C (fig. 34), diviser AB au point D, en sorte que AD soit à C comme le carré de C au carré de BD. Et c'est ce dont on a besoin pour résoudre le problème dans la solution duquel échoua Almâhânî. »

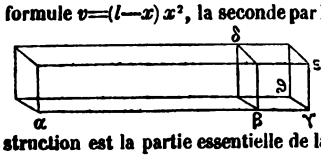
« Mais cela n'est possible que lorsque la ligne C n'est pas plus grande que la ligne qui peut le solide ayant pour arête un tiers de AB et défaillant d'un (cube qui a pour base le) carré dont le côté est égal à deux tiers de AB (**), c'est-à-dire : la ligne qui peut quatre neuvièmes d'un tiers du cube de AB (***). »

« Toutefois supposons que C puisse être plus grande, ce qui sera plus général, et considérons AB dans deux cas, en

---

*) Savoir, pour appliquer à une ligne donnée un parallélipipède de volume donné et défaillant d'un cube.

**) Le ms. porte اذا لم يكن خط جـ اطول من الخط القوى على المجسم المضاف اليه ثلث اب الناقص مربعا ضلعه ثلثا اب اعنى الخط القوى على الخط القوى على On se serait attendu à trouver اربعة اتساع ثلث مكعب اب المجسم المضاف الى خط اب الناقص مكعبا ضلعه ثلثا اب Pour expliquer les termes employés dans le texte, rappelons d'abord que cette construction d'un parallélipipède appliqué à une ligne et défaillant d'un cube est calquée sur celle d'un rectangle appliqué à une ligne et défaillant d'un carré. (Eucl., VI, 28.) En effet, en désignant par l la ligne donnée, par v ou s le volume ou la surface donnés, la première construction s'exprimera par la formule $v=(l-x)x^2$, la seconde par la formule $s=(l-x)x$. Donc, au lieu de parler du solide appliqué à la ligne $\alpha\gamma$ et défaillant du cube $\gamma\delta$, dont le côté est $\beta\gamma$, le géomètre arabe, en faisant abstraction de la hauteur commune $\gamma\varepsilon$, égale au côté du cube retranché, n'a en vue que la base $\alpha\vartheta$, qui dans cette construction est la partie essentielle de la figure, et appelle le solide «défaillant d'un carré dont le côté est $\beta\gamma$». Ensuite remarquons que tandis que le solide $\alpha\delta$ est, en effet, dans toute sa longueur appliqué à la ligne $\alpha\gamma$, la ligne $\alpha\gamma$ n'est pas tout entière appliquée au solide $\alpha\delta$; or la partie de cette ligne appliquée au solide المضاف اليه, c'est $\alpha\beta$, l'arête du solide appliqué, et dans notre cas $\frac{1}{3}$ AB.



***) Condition : $C \leqq \sqrt[3]{\left(AB-\frac{2}{3}AB\right)\left(\frac{2}{3}AB\right)^2}$ ou $C \leqq \sqrt[3]{\frac{4}{27}\overline{AB}^3}$.

nous proposant dans l'un de retrancher BD de AB, et dans l'autre d'ajouter BD à AB, en sorte que AD soit à C comme le carré de C au carré de BD. »

Voici maintenant la solution que le géomètre arabe donne du problème ainsi posé, et que je ne reproduis pas textuellement, afin d'abréger.

Il fait BE = C, et construit sur BE comme base le carré BEZH. Il décrit une *parabole* dont le sommet est A, l'axe AB, et le paramètre C; ensuite il fait passer par Z une *hyperbole* ayant EB, BH pour asymptotes. Les deux coniques se rencontrent nécessairement. Du point d'intersection T, on abaisse deux perpendiculaires TK, TD sur BH, BE. On aura en vertu de la parabole 1) AD : TD = TD : C, en vertu de l'hyperbole BK : BE = EZ : KT ou 2) TD : C = C : BD. De la combinaison de 1) et 2) il suit AD : TD = TD : C = C : BD ou AD : C = $\overline{C}^2$: $\overline{BD}^2$; c. q. f. d.

Puis il en revient ainsi au problème principal :

« Après avoir résolu préalablement ce lemme, prenons AB dans les deux cas, et proposons-nous d'appliquer à AB un solide à côtés parallèles, égal à un solide donné, excédant ou défaillant d'un cube (*). Que la ligne C soit le côté d'un cube égal au solide donné. Dans l'un des deux cas retranchons de AB, et dans l'autre ajoutons à AB une ligne BD, telle que AD soit à C comme le carré de C au carré de BD. »

« (La possibilité de) cette construction n'est pas limitée au second cas, mais elle l'est nécessairement au premier. La limite, c'est que la ligne C ne soit pas plus grande que la ligne qui peut un cube égal à quatre neuvièmes d'un tiers du cube de AB, c'est-à-dire le solide ayant pour arête un tiers de AB

*) Que le volume donné soit égal au cube $\overline{C}^3$. Au moyen du lemme on trouve AD, en sorte que AD . $\overline{BD}^2 = \overline{C}^3$; mais AD = (AB ± BD); donc AB . $\overline{BD}^2 \pm \overline{BD}^3$ égal au volume donné; ce qu'il s'agissait d'obtenir.

et défaillant d'un (cube qui a pour base le) carré dont le côté est égal à deux tiers de AB (*). »

« Le produit du carré de BD en AD est égal au solide à côtés parallèles, terminé par deux carrés de BD et par quatre rectangles AD, BD; le produit du carré de C en C, c'est le cube égal au solide donné. Le solide appliqué à AB sera dans un cas défaillant, et dans l'autre excédant, d'un cube dont le côté est égal à BD. C'est ce que nous nous proposions de démontrer. »

Ensuite le géomètre arabe se propose ce problème plus général:

Étant donné un volume V, un parallélipipède P, et une droite a, appliquer à cette droite un parallélipipède égal à V, et défaillant ou excédant d'un parallélipipède semblable à P.

J'abrégerai considérablement la démonstration par laquelle il ramène ce problème au lemme résolu préalablement, en introduisant quelques notions modernes.

Désignons par p, q, r, trois arêtes d'un parallélipipède aboutissant à un même sommet, et par α, β, γ les angles compris entre ces trois arêtes prises deux à deux; le volume de ce parallélipipède sera représenté par l'expression

$$p.q.r.\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2}.$$

Dès qu'il s'agit, comme ici, de parallélipipèdes semblables, α, β, γ seront constants, q et r pourront être remplacés par $\lambda . p$ et $\mu . p$, λ et μ désignant des rapports constants, et p seul restant

---

(*) وهو ان لا يكون خط جـ اطول من الخط القوى على مكعب وهو اربعة اتساع ثلث مكعب اب وهو المضاف الى ثلث اب الزايد مربعا ضلعه اب ثلثا الزايد Évidemment est une erreur de copiste pour الناقص; comparer le passage du texte cité ci-dessus.

variable, le volume d'un quelconque de ces parallélipipèdes s'exprimera par $p^3 . k$, k désignant une constante.

Maintenant déterminons p^3 en posant $p^3 . k = V$; puis résolvons l'équation $(a-x)x^2 = p^3$ (résolution donnée par l'auteur dans son lemme); ayant déterminé x, prenons sur AB (fig. 35) un segment $DB = x$, et faisons le parallélipipède BK semblable à P. On aura, volume de $BK = x^3 . k$. Mais on voit que $BK : AK = BD : AD$; donc volume de $AK = (a-x) . x^2 . k = p^3 . k = V$; ce qu'il s'agissait d'obtenir. —

Je ne m'arrêterai pas à faire remarquer comment les deux constructions données par l'auteur de ce morceau, des équations $(AB \pm x)x^2 = C^3$ (en désignant BD par x), sont exactement les mêmes que celles des équations n° 16 et 17 par Alkhayyâmî. Il suffira pour cela de jeter un coup d'œil sur les figures 20, 21 et 34.

Mais ce sur quoi j'appelle l'attention, c'est la limite énoncée dans ce morceau relativement à la solubilité de l'équation $(AB-x)x^2 = C^3$, c'est-à-dire de l'équation $x^3 + a = cx^2$. Car il n'y a pas d'ambiguïté à ceci : l'auteur déclare, avec une précision parfaite, que le lemme d'Archimède fut ramené par Almâhânî à une équation de la forme $x^3 + a = cx^2$, et que la résolution de cette équation que se proposa Almâhânî dépend à son tour du lemme résolu par l'auteur, c'est-à-dire de la construction de l'équation $(AB-x) : C = C^2 : x^2$. La relation qui exprime la limite de la solubilité d'un de ces problèmes enchaînés l'un à l'autre, est donc nécessairement censée être donnée en même temps pour les autres.

Or l'auteur énonce cette limite absolument comme les modernes, c.-à-d. qu'il l'exprime par la relation

$$C = \sqrt[3]{\frac{4}{27}\overline{AB}^3} \quad \text{ou} \quad 27a = 4c^3.$$

Après avoir signalé ce fait, qui me paraît digne d'une attention particulière, je vais montrer comment les géomètres arabes pouvaient arriver à cette découverte.

Le lemme d'Archimède avait été résolu par Eutocius (*) sous la forme suivante : Déterminer sur une droite donnée AB un segment BE, tel que AE soit à une ligne donnée comme une surface donnée au carré de BE. Puis Eutocius avait remarqué et démontré que le produit de la surface donnée en la ligne donnée ne doit pas être plus grand que le produit $AE.\overline{EB}^2$ lorsqu'on prend $BE = 2.EA$.

C'est par l'heureuse idée de substituer au produit des deux données linéaire et superficielle, le cube d'une seule ligne donnée, que le géomètre arabe est parvenu à l'expression moderne de cette limite.

Enfin je fais observer que ce qui dans la bouche d'Eutocius n'était qu'une propriété isolée d'un certain cas de géométrie, se changea entre les mains des Arabes en un théorème de la théorie des équations cubiques. Mais on verra dans la note suivante que ce n'est pas même à ceci que se borne le parti que les mathématiciens arabes ont tiré de ce problème d'Eutocius, dont ils ont su comprendre toute la portée. —

Ce morceau n'est précédé d'aucune indication de son auteur, et le texte même n'en contient pas non plus. La démonstration se termine exactement à la fin de la dernière ligne d'une page, et au-dessous du milieu de cette dernière ligne se trouvent les mots والحمد لله وحده (*Soli Deo gloria*), d'une écriture plus mince que le reste. La page suivante commence ainsi :

هذه المقدمة من استخراج الاستاد ابى سهل الكوهي
رضى الله عنه وانا اعلمت نسختها للشيخ ابى الجود رحمه الله

*) Archimède, éd. d'Oxf., p. 164 sqq.

تامر رجلًا ان يضمر ثلثه اعدادا مختلفه الاول اكثرها والثانى وسطها والثالث اقلها ثم الخ

c'est-à-dire : « La résolution de cette proposition appartient au professeur Aboû Sahl Alqoûhî, que Dieu lui soit favorable! et moi, j'en ai communiqué un exemplaire au chaïkh Aboûl Djoûd, que Dieu soit miséricordieux envers lui! Propose à un homme d'imaginer trois nombres différents, de sorte que le premier soit le plus grand, le second moyen, et le troisième le plus petit. Ensuite, » etc.

De cette manière on ne sait pas si c'est le problème qui précède ou celui qui suit qui est attribué à Alqoûhî. Malheureusement encore il ne se trouve dans le manuscrit qu'un fragment de ce problème arithmétique ou algébrique, dont l'énoncé commence avec la troisième ligne, ce qui ne permet pas de faire des conjectures sur son auteur.

Toutefois je suis porté à croire que les mots en question se rapportent au morceau précédent; en sorte que le mérite des découvertes dont je viens de rendre compte, appartiendrait à Alqoûhî. Ce qui me fait adopter cette opinion, c'est exactement cette considération de limite, fondée sur le théorème d'Eutocius. Car on rencontrera dans la discussion d'un problème qui fait l'objet de l'addition suivante, et qui appartient indubitablement à Alqoûhî, d'autres considérations de limites, fondées également sur le théorème d'Eutocius, et présentant ainsi une connexion intime avec le morceau en question.

Le catalogue de la bibliothèque de Leyde (1716, fol.), où ce morceau se trouve coté numéro 1100, porte : « Muh. Ibn Leith notæ ad commentaria Mahani in secundum librum Archimedis de sphæra et cylindro. »

Je ne sais pas sur quoi se fonde cette indication; mais la seule chose que je puisse affirmer avec certitude, c'est que ce

morceau ne peut pas avoir pour auteur Aboûl Djoûd Mohammed Ben Allaïth. Car on voit que les erreurs commises par ce géomètre dans la discussion de l'équation $x^3 + a = cx^2$, et relevées par Alkhayyâmî (voir p. 43, 82 et 83 sqq.), portent exactement sur la limite de la solubilité, tandis que le principal mérite du morceau en question consiste à avoir énoncé cette limite avec justesse et élégance. Et si les deux lignes du manuscrit discutées ci-dessus se rapportent à ce morceau, de sorte qu'une copie en ait été communiquée (*) à Aboûl Djoûd, certainement cela doit avoir eu lieu après qu'il eut composé le mémoire examiné par Alkhayyâmî.

C

« Au nom de Dieu clément et miséricordieux! »

« Je dis (**). Et Aboû Sahl Vîdjan Ben Vastem Alqoûhî est auteur d'un mémoire qu'il composa dans le but de combler la

---

*) On peut aussi entendre les mots اعطيت نسختها للشيخ الخ ainsi : « on m'en a communiqué un exemplaire portant Aboûl Djoûd comme nom d'auteur. » Alors c'est une contradiction d'un seul exemplaire avec l'assertion positive de la ligne précédente; et mes arguments n'en subsistent pas moins.

**) On voit que ce n'est qu'une reproduction ou un extrait du traité original d'Alqoûhî. En effet, ce morceau, qui dans le ms. de la bibliothèque de Leyde est isolé, fait partie, dans le ms. de la Bibliothèque nationale, d'une traduction ou plutôt d'une édition arabe du traité de la sphère et du cylindre d'Archimède. Dans une courte préface, l'auteur, qui d'ailleurs ne se nomme pas, dit qu'il a fait cette édition 1° d'après un exemplaire de l'édition vulgaire de ce traité, mal traduit d'abord, revu et corrigé ensuite par Thâbit Ben Korrah, duquel il s'est efforcé d'éliminer les fautes qui s'y étaient glissées par l'ignorance du copiste; 2° d'après une traduction du commentaire d'Eutocius, faite avec soin et intelligence par Ishâk Ben Honaïn, auquel commentaire se trouvait entremêlé le texte du traité d'Archimède. De plus, il y était joint séparément le texte du premier livre jusqu'à la quatorzième proposition, traduit de même par Ishâk. L'éditeur dit encore avoir donné des explications qui lui sont propres, et *avoir mis à contribution les ouvrages d'autres géomètres* pour éclaircir les endroits difficiles; enfin il nous avertit que le nombre des propositions du premier livre, dans l'exemplaire de Thâbit, était quarante-huit; dans celui d'Ishâk, quarante-trois; et qu'il a jugé convenable de joindre à la fin du traité le livre de la mesure du cercle par Archimède. — L'ouvrage original d'Alqoûhî est mentionné dans le passage du Qitâb Alfihrist cité ci-dessus (p. 55, l. 19).

lacune qui se trouve dans le second livre de l'ouvrage d'Archimède. Il a dit dans ce mémoire qu'il y a là trois constructions qui rentrent dans la même catégorie, dont la première est celle d'un segment de sphère qui, de deux autres segments de sphère, est égal à l'un et semblable à l'autre. La seconde, celle d'un segment de sphère dont la surface est égale à celle d'un autre segment de sphère, et qui est semblable à un second segment de sphère. La troisième, celle d'un segment de sphère égal à un autre segment de sphère, et dont la surface est égale à celle d'un second segment de sphère. Archimède résolut les deux premiers problèmes sans s'occuper du troisième, qui ne fut pas ajouté non plus aux deux autres par les géomètres qui lui succédèrent. Ensuite il (Alqoûhî) en donna la construction et la démonstration de la manière suivante. »

Énonçons avec un peu plus de précision et puis examinons préalablement les trois problèmes en question.

I. Construire un segment de sphère égal en volume à un segment de sphère donné, et semblable à un second segment de sphère donné. (Archim., Sph. et Cyl., II, 6.)

II. Construire un segment de sphère égal en surface (*) à un segment de sphère donné, et semblable à un second segment de sphère donné. (Archim., Sph. et Cyl., II, 7.)

III. Construire un segment de sphère égal en volume à un segment de sphère donné, et égal en surface à un second segment de sphère donné. (Alqoûhî.)

Désignons le rayon de la sphère à laquelle appartient le segment qu'il s'agit de construire par r, la distance du plan coupant au pôle du segment par Δ, on aura:

I. $\frac{\pi}{3}\Delta^2(3r-\Delta)=a$, $\frac{\Delta}{r}=c\ldots$ $r=\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi c^2(3-c)}}$, $\Delta=\sqrt[3]{\frac{3ac}{\pi(3-c)}}$

*) Dans la surface du segment la base circulaire n'est pas comprise.

II. $2\pi\Delta r = b$, $\frac{\Delta}{r} = c$ ... $r = \sqrt{\frac{b}{2\pi c}}$, $\Delta = \sqrt{\frac{bc}{2\pi}}$

III. 1) $\frac{\pi}{3}\Delta^2(3r-\Delta) = a$, 2) $2\pi\Delta r = b$.

Posons $\frac{a}{b} = a'$, $\frac{b}{\pi} = b'$; il suit

3) $\Delta^3 - \frac{3}{2}b'\Delta + 3a'b' = 0$, 4) $r^3 - \frac{b'}{4a'}r^2 + \frac{b'^2}{24a'} = 0$.

Comme il faut exclure les valeurs négatives de r et de Δ, et parmi les valeurs positives celles qui rendraient $\Delta > 2r$ (*), on trouve:

1° Que le problème n'a de solution que tant que $b' \leqq 18a'^2$;

2° Que lorsque $b' = 18a'^2$, le segment cherché est l'hémisphère (**);

3° Que pendant que $36a'^2 > b' > 18a'^2$, on obtient deux segments, dont l'un est plus et l'autre moins grand que la moitié de la sphère;

4° Que lorsque $b' = 36a'^2$, il existe deux solutions dont l'une donne une sphère entière, l'autre un segment dont la hauteur rapportée à l'unité du rayon est égale à 0,268 environ;

5° Enfin, que lorsque $b' > 36a'^2$, il n'y a qu'une seule solution et un seul segment plus petit que la moitié de la sphère.

Cet exposé rapide fait voir que le problème que se propose Alqoûhî est d'une difficulté supérieure aux deux premiers résolus par Archimède. Ce n'est même que grâce à la forme particulière des équations 1) et 2), que le problème ne conduit

---

*) On discute facilement les deux équations proposées sous ce dernier rapport, en y substituant 1 à r, ce qui change la condition $b' > 18a'^2$ dans $4 > \Delta(3-\Delta)^2$, et en examinant ensuite, à l'aide du théorème de M. Sturm, le nombre des racines réelles de l'équation $\Delta^3 - 6\Delta^2 + 9\Delta - \varepsilon = 0$ (où $4 > \varepsilon > 0$) comprises dans les deux intervalles de 0 à + 1 et de + 1 à + 2, en distinguant pour le second intervalle les cas $4 > \varepsilon > 2$, $2 > \varepsilon > 0$ et $\varepsilon = 2$; dans ce dernier cas on aura $\Delta^3 - 6\Delta^2 + 9\Delta - 2 = (\Delta-2).(\Delta-2-\sqrt{3}).(\Delta-2+\sqrt{3})$.

**) Les deux équations se décomposent, en ce cas, de la manière suivante :

$$\left(\Delta - \sqrt{\tfrac{b'}{2}}\right)^2\left(\Delta + \sqrt{2b'}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(r - \sqrt{\tfrac{b'}{2}}\right)^2\left(r + \tfrac{1}{4}\sqrt{2b'}\right) = 0.$$

pas à une équation du sixième degré. Or le géomètre arabe ne résout pas seulement le problème, mais il en discute encore les cas particuliers tout aussi complétement qu'on vient de le faire. Pour arriver à ce résultat, il s'y prend de la manière suivante:

Il construit deux cônes tels que le premier soit égal en volume au premier segment de sphère donné, et que le second ait pour hauteur et pour rayon de sa base une droite égale à la droite HN, menée du pôle du second segment de sphère donné à un point quelconque de la circonférence de sa base(*). En désignant les volumes de ces deux cônes par C et C′ respectivement, on aura $HN=\sqrt{b'}$ et

$$C = a, \qquad C' = \frac{b'^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.$$

Ensuite il prend une ligne $BK=\frac{3}{2}.\frac{C'}{C}.HN=\frac{1}{2}\frac{b'}{a'}$ et une ligne $S=HN.\frac{C}{C'}=3a'$. Avec ces données il construit deux coniques,

une *hyperbole équilatère* $x.y=\overline{HN}^2$

et une *parabole* $y^2=(BK-x)S$.

L'intersection de ces deux coniques a pour ordonnée la hauteur du segment qu'il s'agit de construire, et pour abscisse le diamètre de la sphère à laquelle ce segment appartient (**).

Ce qu'il y a de remarquable ici, c'est la construction simultanée de deux équations renfermant deux inconnues, par l'intersection de deux coniques. Mais passons à la discussion, bien plus intéressante, que le géomètre arabe fait des cas particuliers.

---

*) On voit aisément que la longueur de cette droite est constante pour tous les segments de sphère égaux en surface.

**) En effet, en éliminant alternativement x et y entre les équations des deux sections coniques, après y avoir substitué à HN, BK, S leurs valeurs en a' et b', on aura

$$5)\ y^3-\frac{3}{2}b'y+3a'b'=0, \qquad 6)\ x^3-\frac{b'}{2a'}x^2+\frac{b'^2}{8a'}=0.$$

Ces équations, comparées aux équations 3) et 4), montrent immédiatement que y répond à Δ et x à $2r$.

Alqoûhî distingue ces cas suivant les différentes valeurs que peut prendre le rapport $\frac{C'}{C}$, à savoir:

$$\frac{C'}{C} \leqq \frac{\sqrt{2}}{1}, \quad \frac{\sqrt{2}}{1} < \frac{C'}{C} < \frac{2}{1}, \quad \frac{C'}{C} \geqq \frac{2}{1};$$

ce qui équivaut à

$$b' \leqq 18a'^2, \quad 18a'^2 < b' < 36a'^2, \quad b' \geqq 36a'^2.$$

Il démontre d'abord d'une manière rigoureuse, par la considération de la tangente commune, qu'au cas du contact des deux coniques on a $\frac{C'}{C} = \frac{\sqrt{2}}{1}$; ensuite qu'on a généralement $\left(\frac{C'}{C}\right)^2 = \frac{(2r)^3}{\Delta(3r-\Delta)^2}$, et que le dénominateur de cette dernière expression devenant un maximum au cas du contact, puisque alors $\Delta = r$, la valeur $\frac{\sqrt{2}}{1}$ correspondant au cas du contact sera la valeur minimum du rapport $\frac{C'}{C}$, et la limite qu'il ne peut pas surpasser en petitesse.

Il démontre ensuite, d'une manière non moins rigoureuse et non moins purement géométrique, que tant que $\Delta > r$, on aura $\frac{C'}{C} < \frac{2r}{r}$; d'où il suit que lorsque le segment qu'il s'agit de construire doit être plus grand que l'hémisphère, le rapport donné $\frac{C'}{C}$ a pour limite supérieure $\frac{2}{1}$.

L'auteur constate encore que lorsque le segment est plus petit que l'hémisphère, le rapport $\frac{C'}{C}$ n'a pas de limite supérieure, et que de ce qui précède il suit qu'aux valeurs de $\frac{C'}{C}$

comprises entre $\frac{\sqrt{2}}{1}$ et $\frac{2}{1}$ peuvent correspondre des segments dans les deux moitiés de la sphère.

Mais le passage qui se rapporte à cette discussion me semble trop important pour que je puisse, malgré sa longueur, me dispenser d'en donner la traduction textuelle.

Après avoir terminé l'analyse (*) du problème, l'auteur s'exprime ainsi :

« Et nous disons : Le rapport du cône de la surface au cône du segment (**) ne peut pas être un rapport quelconque, mais il existe nécessairement pour lui une limite de petitesse qu'il ne surpassera pas, et qui correspond au contact des deux sections coniques en M (fig. 36). Menons (en ce cas) la droite OML touchant les deux sections coniques et passant par leur point de contact. A cause de l'hyperbole on aura OM égale à ML, comme c'est démontré dans la troisième proposition du deuxième livre du traité des Sections Coniques (***) ; donc, parce que DM et BO sont parallèles, LD sera égale à DB, c'est-à-dire au diamètre de la sphère. Et parce que ML est tangente à la parabole, LK sera égale à KD, en vertu de ce qui est démontré dans la trente-troisième proposition du premier livre du même traité (****) ; conséquemment DK sera égale au rayon de la sphère, et le point K coïncidera avec le point E (*****). Mais on vient d'expliquer ci-dessus que le rapport du cône de la surface au cône du segment est égal au rapport du rectangle

---

*) Dans l'acception ancienne de ce mot.

**) C'est ainsi que l'auteur nomme les deux cônes dont nous avons désigné les volumes par C' et C respectivement.

***) Apollon., éd. d'Oxf., page 108.

****) Apollon., éd. d'Oxf., page 59.

*****) On avait déterminé le point E en prenant sur le prolongement du diamètre BD, à partir du point D, un segment DE égal au rayon.

AB en BK au rectangle BZ en BE (*), c'est-à-dire BZ en BK, qui est égal au rapport de AB à BZ. Le rapport de ces cônes étant égal aussi au rapport de AB à S (**), on aura BZ, c'est-à-dire DM égale à S; et le rectangle S en DK étant égal au carré de DM (***), DK sera égale à DM, c'est-à-dire à BZ; d'où il suit que BZ et pareillement AZ seront égales au rayon de la sphère. Le rapport du cône de la surface au cône du segment, qui est égal au rapport de AB à BZ, sera donc en ce cas égal au rapport qui multiplié en lui-même produit le rapport de deux à un, parce que le rapport de AB à BZ multiplié en lui-même est égal au rapport de DB à BZ. Ce rapport, qui multiplié en lui-même est égal au rapport de deux à un, est le rapport de deux à sa racine, ou le rapport de la racine de deux à l'unité. Le rapport dont il s'agit (****) ne peut donc pas être plus petit que cela; car le rapport du rectangle AB en BD au rectangle BZ en ZE, qui est égal au rapport du cône de la surface au cône du segment (*****), est composé du rapport de AB à BZ, c'est-à-dire du rapport de DB à BA, et du rapport de BD à ZE; de sorte qu'il est égal au rapport du carré de BD au rectangle AB en ZE. Prenant BD comme hauteur commune, le rapport du cône de la surface au cône du

---

*) $\frac{C'}{C} = \frac{AB.BK}{BZ.BE}$; on vérifie cela aisément au moyen des relations proposées ci-dessus, page 106.

**) Voyez page 106, ligne 14, et la première note de la même page.

***) A cause de la parabole; voir page 106, lig. 16.

****) $\frac{C'}{C}$.

*****) Dans ce qui précède, l'auteur avait obtenu cette relation de la manière suivante. En prenant un segment TZ tel que TZ : BZ = (DE + DZ) : DZ, il avait (voir Archim., Sph. et Cyl. II, 3, éd. d'Oxf., page 150) $C = \frac{\pi}{3} TZ.\overline{AZ}^2$; d'un autre côté, il avait $C' = \frac{\pi}{3} AB.\overline{AB}^2$. Mais $\overline{AB}^2 : \overline{AZ}^2 = \overline{DB}^2 : \overline{DA}^2 = DB : DZ$, donc $\frac{C'}{C} = \frac{AB.DB}{TZ.DZ}$; et puisqu'il avait fait $TZ.DZ = BZ.ZE$, il suit : $\frac{C'}{C} = \frac{AB.DB}{BZ.ZE}$; c. q. f. d.

segment sera égal au rapport du cube de BD au solide AB en ZE en BD: en même temps, donnant aux rectangles AB en BD, et BZ en ZE, la hauteur commune ZE, on aura le rapport du cône de la surface au cône du segment égal au rapport du solide AB en BD en ZE au solide ligne BZ en carré de EZ; donc, *ex æquo*, le rapport du cube de BD au solide ligne BZ en carré de ZE, égal au rapport du cône de la surface au cône du segment multiplié en lui-même (*). Mais le solide ligne BZ en carré de ZE est un maximum lorsque BZ est la moitié de ZE, comme il est démontré dans ce que nous avons rapporté (**) suivant Eutocius, à l'aide des sections coniques; cependant nous en donnerons plus tard une démonstration indépendante des sections coniques. Le rapport du cube de BD au solide ligne BZ en carré de ZE est donc un minimum lorsque BZ est égale au rayon de la sphère; et si le cône de la surface est considéré comme invariable, le segment sera un maximum en ce cas. »

« Relativement à la grandeur, le rapport dont il s'agit n'aura pas de limite lorsque le segment est plus petit que la moitié de la sphère. »

« Lorsque, au contraire, le segment est plus grand que la moitié de la sphère (***), ce rapport ne peut pas être plus grand

---

*) Voici le raisonnement de l'auteur :

$$\frac{C'}{C} = \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{BD}{ZE} = \frac{DB}{AB} \cdot \frac{BD}{ZE} = \frac{\overline{BD}^3}{AB.ZE.BD}$$

et en même temps $\frac{C'}{C} = \frac{AB.BD.ZE}{BZ.\overline{ZE}^2}$, donc $\left(\frac{C'}{C}\right)^2 = \frac{\overline{BD}^3}{BZ.\overline{ZE}^2}$

**) Je rappelle que ce morceau faisait partie d'une édition arabe du traité de la sphère et du cylindre, en sorte qu'il avait été précédé de la cinquième proposition du second livre, et du commentaire d'Eutocius qui s'y rapporte. Voir la démonstration donnée par Eutocius, éd. d'Oxf., page 166, ligne 25 du texte grec, sqq.

***) Supposant $BZ > r$, on aura $AB.BD < \overline{BD}^2$; donc 1) $\frac{AB.BD}{BZ.ZE} < \frac{\overline{BD}^2}{BZ.ZE}$; en même temps $BZ.ZE > BD.DE$, donc 2) $\frac{\overline{BD}^2}{BZ.ZE} < \frac{\overline{BD}^2}{BD.DE} = \frac{BD}{DE}$; de 1) et 2) il suit $\frac{C'}{C} < \frac{BD}{DE} = \frac{2}{1}$.

que celui de deux à un. Car le rectangle AB en BD est plus petit que le carré de BD; conséquemment le rapport du rectangle AB en BD au rectangle BZ en ZE, sera plus petit que le rapport du carré de BD au rectangle BZ en ZE; Z étant (en ce cas) plus voisin du milieu de BE que D, le rectangle BZ en ZE sera plus grand que le rectangle BD en DE, et le rapport du carré de BD au rectangle BZ en ZE plus petit que le rapport du carré de BD au rectangle BD en DE. Conséquemment le rapport du rectangle AB en BD au rectangle BZ en ZE, c'est-à-dire le rapport du cône de la surface au cône du segment plus petit de beaucoup que le rapport du carré de BD au rectangle BD en DE, c'est-à-dire que le rapport de BD à DE, qui est égal au rapport de deux à un. Le rapport de deux à un est donc la limite que ce rapport $\left(\frac{C'}{C}\right)$ ne peut pas surpasser en grandeur; et si nous considérons le cône de la surface comme invariable, le segment sera un minimum en ce cas. »

« De ce que nous venons de dire, il résulte que le rapport de deux à sa racine est le minimum de tous les rapports qui ont lieu dans la sphère entre le cône de la surface et le cône du segment; que les rapports compris entre lui et le rapport de deux à un peuvent correspondre à des segments dans les deux moitiés de la sphère; et que des rapports de deux à une quantité plus petite que l'unité, aucun ne correspond à la partie qui est plus grande que la moitié, mais qu'ils appartiennent tous exclusivement à la partie qui est plus petite que la moitié. »

Cette discussion est suivie de la synthèse du problème et de la démonstration de la synthèse. Celle-ci terminée, l'auteur considère une seconde fois les cas particuliers; je reproduis textuellement le passage qui contient cette seconde discussion,

ou plutôt ce résumé, dans lequel l'auteur établit parfaitement les mêmes catégories auxquelles on a été conduit ci-dessus (pag. 105) par les méthodes modernes.

« De ce que nous avons dit, il résulte que lorsque le rapport mentionné (*) est plus petit que le rapport de deux à sa racine, le problème ne peut pas avoir de solution; mais lorsqu'il n'est pas plus petit que cela, la solution est possible. »

« D'abord, s'il est égal au rapport de deux à sa racine, les deux sections coniques se touchent uniquement au point M; le segment cherché est égal à la moitié de la sphère, et pas à autre chose, et les deux points E, K deviennent identiques. »

« Lorsqu'il est plus grand que le rapport de deux à sa racine, et plus petit que le rapport de deux à un, les deux sections coniques se coupent en deux points; et lorsque de ces deux points deux perpendiculaires sont abaissées sur BK, les deux abscisses correspondant aux deux perpendiculaires sont justes toutes les deux, et seront diamètres de la sphère. Pour l'une d'elles le segment cherché est plus petit que la moitié de la sphère, et c'est le cas lorsque la perpendiculaire qui détermine le diamètre de la sphère est abaissée de celui des deux points d'intersection qui est le plus éloigné du point B; le point E en ce cas est situé en dehors de la ligne comprise entre les deux points B et K. Relativement à l'autre, le segment sera plus grand que la moitié de la sphère, et c'est le cas lorsque la perpendiculaire dont il s'agit est abaissée du point d'intersection le plus voisin de B; le point E en ce cas est situé entre les deux points B et K. »

« Lorsque ce rapport est égal au rapport de deux à un, l'abscisse déterminée sur BK par la perpendiculaire la plus voi-

---

*) $\frac{c'}{c}$.

sine de B, est égale à AB, et le segment est le plus grand de tous ceux qui existent sur la sphère. Quant à l'abscisse déterminée par la perpendiculaire la plus éloignée, le segment cherché de la sphère qui lui correspond est plus petit que la moitié, et la flèche du segment est un huitième à peu près du diamètre de la sphère, ou plutôt plus grande (*) que cela d'une petite quantité, ce qu'on détermine à l'aide de l'istikrâ (**) et du calcul. »

« Enfin lorsqu'il est plus grand que le rapport de deux à un, la partie de BK coupée par la perpendiculaire la plus voisine n'est plus juste, parce qu'elle doit représenter le diamètre de la sphère, et que pourtant AB serait plus grande qu'elle ; au contraire, la partie coupée par la perpendiculaire la plus éloignée de B est seule juste à cause de cela ; le segment (qui lui correspond) sera plus petit que la moitié (de la sphère), et sa flèche plus petite que le rayon (***). »

« Dans tous les cas, AB sera invariable. »

Voici enfin la démonstration élémentaire du théorème d'Eutocius, que l'auteur avait annoncée ci-dessus (pag. 110, lig. 12), et qu'il donne en effet de la manière suivante.

Il prend sur la droite AC (fig. 37) un point B, de sorte que $AB = \frac{BC}{2}$, et prolonge AC d'une partie CE = BC. Puis, en prenant un point D situé 1° entre A et B, 2° entre B et C, il démontre que dans les deux cas on aura $AB.\overline{BC}^2 > AD.\overline{DC}^2$.

Premier cas. On a AB : BC = BC : BE, donc $AB.BE = \overline{BC}^2$. Mais AB.BE > AD.DE (parce que B est plus voisin du milieu de AE que D). Conséquemment

*) Les deux manuscrits portent « plus petit, » et le manuscrit parisien, au lieu de ثمن « un huitième », porte ثلث « un troisième ».

**) Ici ce terme me paraît indiquer des essais successifs, une sorte d'interpolation. (Voir la note de la page 10.)

***) Les deux manuscrits portent القطر « le diamètre », au lieu de نصف القطر.

$$\frac{ED.DB}{ED.AD} > \frac{ED.DB}{\overline{BC}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{DA} > \frac{ED.DB}{\overline{BC}^2},$$

d'où il suit

$$\frac{AB}{AD} > \frac{ED.DB + \overline{BC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{BC}^2} \text{ (Eucl., Élém., II, 6)};$$

donc $AB.\overline{BC}^2 > AD.\overline{DC}^2$, c. q. f. d.

Second cas. $AB.BE = \overline{BC}^2 < AD.DE$,

$$\frac{BD.DE}{\overline{BC}^2} > \frac{BD.DE}{AD.DE} = \frac{BD}{DA}; \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{BC}^2}{BD.DE} < \frac{AD}{DB};$$

conséquemment

$$\frac{\overline{DC}^2}{BD.DE} < \frac{AB}{BD} \quad \text{ou} \quad \frac{BD.DE}{\overline{DC}^2} > \frac{BD}{BA};$$

d'où il suit

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}^2} > \frac{DA}{AB} \quad \text{ou} \quad AB.\overline{BC}^2 > AD.\overline{DC}^2, \quad \text{c. q. f. d.}$$

D

Problème résolu par Aboûl Djoûd Mohammed Ben Allaïth, et proposé à ce géomètre par Aboûl Rîhân Mohammed Ben Ahmed Albîroûnî (*).

Étant donnés une droite BC (fig. 38) et un point A, mener de A à BC une droite AD telle qu'on ait $AD.BC + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$.

Aboûl Djoûd fait WB perpendiculaire et égale à BC, et construit une *parabole* dont W est le sommet, WB l'axe et BC le paramètre. Ensuite il abaisse de A sur BC une perpendiculaire AL, et fait passer par A une *hyperbole équilatère* ayant son sommet en A, son axe sur le prolongement de LA et son paramètre égal

*) جواب الشيخ الفاضل ابى الجود محمد بن الليث ايده الله عما ساله عنه الاخ الفاضل ابو الريحان محمد بن احمد البيرونى. Albîroûnî ramena à ce problème la trisection de l'angle ; voir p. 119, l. 10.

à 2.AL. Le pied de la perpendiculaire abaissée du point d'intersection Z des deux coniques, sera le point D qu'il s'agit de déterminer.

Je ne reproduis pas les raisonnements de l'auteur, qui n'offrent rien de particulièrement remarquable, et je me borne à vérifier le résultat énoncé.

Désignons AL, CL, BC par a, b, c respectivement; prenant C pour origine des coordonnées, l'équation de la parabole sera $(c-x)^2=c.(c-y)$, celle de hyperbole $y^2-(x-b)^2=a^2$. Mais cette dernière équation exprime que $AD=y$, de sorte qu'en vertu de l'équation de la parabole on aura $\overline{BD}^2=BC(BC-AD)$, ce qu'il s'agissait d'obtenir.

J'observe encore que l'auteur démontre: 1° que si les deux coniques se rencontrent en deux points, les deux perpendiculaires abaissées des deux points d'intersection déterminent sur BC deux points satisfaisant tous les deux à la condition proposée; 2° qu'il peut arriver que de toutes les lignes plus petites que BC(*) et menées de A à BC, aucune ne satisfasse à la condition voulue, et que c'est le cas lorsque les deux sections coniques ne se rencontrent pas, parce qu'alors on aura $AD.BC+\overline{BD}^2>\overline{BC}^2$.

Solution anonyme du problème suivant, dont l'auteur dit que « depuis un certain temps les algébristes et les géomètres se sont proposé mutuellement ce problème, sans que ni les uns ni les autres en aient donné une solution satisfaisante. »

Construire un trapèze ABCD (fig. 39) de telle sorte que chacun des côtés AB, AD, BC soit égal à 10, et que l'aire de la figure soit égale à 90.

L'auteur montre expressément que ce problème dépend

*) L'équation de la parabole montre immédiatement qu'il doit être $y < c$ ou $AD < BC$.

ciens ni des modernes, à l'exception de ces deux géomètres.»

« Or moi, je l'ai résolu d'une manière plus élégante, j'en ai donné une démonstration plus évidente et une construction plus facile et plus immédiate; de sorte qu'on est en état de résoudre une suite de propositions, chacune desquelles peut être ramenée à la trisection d'un angle, et dont aucun des anciens n'avait réussi à donner des solutions fondées sur des démonstrations géométriques. Tout cela, je l'ai réuni dans ce morceau...»

« Commençons donc par les propositions que les anciens et les modernes ont ramenées, au moyen de la méthode de l'analyse, à la trisection d'un angle rectiligne. Puis faisons suivre la démonstration de ce que moi seul j'ai réussi à découvrir. Enfin démontrons chacune de ces propositions. »

Proposition de Thâbit Ben Korrah Alharrânî.

Que l'angle donné soit DAB (fig. 40). Menons d'un point quelconque B d'un de ses côtés, BD perpendiculaire à AD et BC parallèle à AD, puis menons de A une transversale AEC en sorte que CE=2.AB, on aura angle DAC=$\frac{1}{3}$DAB.

Proposition d'Aboû Sahl Alqoûhî.

Que l'angle donné soit CBE (fig. 41). Prenons sur le prolongement du côté EB deux points A, D, et sur l'autre côté un point C, en sorte que

1) AD=DC, 2) AB:BC=BC:BD.

Menant BP parallèle à DC, on aura angle CBP=$\frac{1}{3}$CBE.

Proposition d'Aboûl Haçan Alchamsî Alharawî (*).

Que l'angle donné soit ABC (fig. 42); construisons le triangle

*) Voir Casiri, vol. I, page 426.

isocèle ABC et abaissons sur sa base la perpendiculaire AZ; menons de C la transversale CED en sorte que ED = DB, on aura angle EBC = $\frac{1}{3}$ ABC.

Propositions proposées par Aboûl Rîhân (Albîroûnî).

Première. Mener dans le triangle isocèle ABC (fig. 43) une droite AD, de sorte qu'en faisant AE = AD et menant ED on ait AB : BD = AD : DE, ce qui revient à faire angle BAD = $\frac{1}{3}$ BAC (*).

Seconde (**). Étant donnés un cercle et une corde AB (fig. 44), mener un rayon EDC, de sorte qu'on ait AC = AD.

Troisième. Étant donné un angle ABC (fig. 45) et sur ses deux côtés deux segments égaux BA, BC, mener de C une droite CD telle qu'on ait $CD.AB + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$. Cela revient à la trisection de l'angle complémentaire HBC, car en prolongeant HB et CD jusqu'à leur point d'intersection T on aura angle HTC = $\frac{1}{3}$ HBC (***).

Proposition d'Aboû Hâmid Alsagânî (****).

Prenons un segment de cercle ABC (fig. 46) contenant le supplément de l'angle qu'il s'agit de diviser, et déterminons sur la circonférence de ce segment un point B et sur le prolongement de CA un point D en sorte qu'on ait BC = BD, AB = AD. On aura angle ACB = $\frac{1}{3}$ CBE.

---

*) On le démontre en faisant passer par E une droite parallèle à BC, et par E, D et le point d'intersection de cette parallèle avec AC, une circonférence de cercle décrite du centre A.

**) هي نتيجة هذه المسئلة بعينها « c'est une suite immédiate de la première ».

***) On a (Euclide, Eléments, II, 5) $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + AD.DZ = \overline{DB}^2 + CD.DE$; mais on avait fait $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + CD.AB$, donc DE = AB = BE, et conséquemment TE = BE.

****) Voir Casiri, vol. I, page 410.

Proposition résolue par un des anciens au moyen de la règle et de la géométrie mobile, mais que nous devons résoudre au moyen de la géométrie fixe.

Étant donnés un cercle et l'angle au centre ACD (fig. 47), mener de D une transversale DHZ coupant le prolongement du diamètre ACB au point Z, de sorte que HZ = AC. On aura angle $DZA = \frac{1}{3} DCA$ (*).

Proposition résolue par nous.

Ayant mené dans un demi-cercle une corde BC (fig. 48) renfermant avec le diamètre BA l'angle qu'il s'agit de diviser, mener un rayon DE tel qu'en faisant EZ parallèle à BC on ait $BZ.ZD = \overline{ZE}^2$. On aura angle $ABE = \frac{1}{3} ABC$ (**).

Proposition que j'ai découverte, et au moyen de laquelle j'ai démontré les autres propositions mentionnées.

Étant donné l'angle KCD (fig. 49), prenons sur les côtés de l'angle supplémentaire des segments égaux CD, CA, et menons de D une droite DE, de sorte qu'on ait

$$1) \quad DE.EC + \overline{EC}^2 = \overline{CD}^2.$$

Décrivant un cercle du centre C et du rayon CA, on aura $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{EC}^2 + AE.EK = \overline{EC}^2 + DE.EM$; mais on avait fait $\overline{CD}^2 = \overline{EC}^2 + DE.EC$, donc EC = EM; d'où il suit immédiatement que les angles M ou D sont chacun un tiers de l'angle donné KCD.

---

*) Le procédé de la « géométrie mobile » consiste à faire pivoter autour du point D une règle divisée en parties aliquotes du rayon, jusqu'à ce que le nombre des parties interceptées entre la circonférence du cercle et le prolongement de AB soit égal au nombre de ces parties qui correspond à la longueur du rayon. Comparer *Archimède*, Lemmes, prop. 8, éd. d'Oxf. p. 358. — Cette proposition est essentiellement la même que la troisième d'Albirouni.

**) C'est absolument la même chose que la proposition d'Alqoûhi.

Voici maintenant le procédé employé par l'auteur pour obtenir la relation 1). Il dit:

« Construisons une hyperbole (fig. 50) ayant son sommet au point C, équilatère, dont le grand axe soit égal à CA et l'angle des ordonnées égal à l'angle C, conformément à la..... proposition du premier livre des Coniques d'Apollonius (*). Ce sera la courbe BC. Faisons BC=CD (**) et DE parallèle à BC. Je dis qu'on aura $DE.EC + \overline{EC}^2 = \overline{CD}^2$. »

« *Démonstration.* Menons l'ordonnée BZ, on aura $AZ.ZC = \overline{ZB}^2$. Mais $AZ.ZC = AC.CZ + \overline{CZ}^2 = BC.CZ + \overline{CZ}^2$; donc $BC.CZ + \overline{CZ}^2 = \overline{BZ}^2$. Or les triangles BCZ et DEC étant semblables, leurs côtés seront proportionnels, de sorte que $DE.EC + \overline{EC}^2$ est à $\overline{DC}^2$ comme $BC.CZ + \overline{CZ}^2$ à $\overline{BZ}^2$. Mais alors $DE.EC + \overline{EC}^2$ sera égal à $\overline{CD}^2$, ce qu'il s'agissait de démontrer. »

Voici maintenant comment l'auteur ramène effectivement à cette proposition toutes les précédentes:

1. *Troisième proposition d'Aboûl Ríhán.*

Après avoir fait EM=EC (fig. 51), menons de M au prolongement du diamètre une droite MZ égale au rayon, et menons ZD, TC. On aura triangle DCM égal et semblable à triangle CMZ; donc MC parallèle à ZD, et angle MZD= angle CDZ = angle CTD, conséquemment aussi MZ parallèle à CT, donc ZT = MC = CT, de sorte que dans le triangle rectangle ZCL on aura ZT = TC = TL; mais c'est à cela que se ramenait cette proposition d'Albîroûnî (voir la note à cette proposition).

2. *Proposition de Thâbit.*

Après avoir fait EM=EC (fig. 51), menons de D une droite

*) La proposition dont il s'agit, et dont le nombre est laissé en blanc dans le manuscrit, est la cinquante-troisième, édition d'Oxf., page 91.

**) Cela revient à combiner avec l'hyperbole un cercle décrit du centre C et du rayon CD.

donc triangle ABC semblable à triangle CBD, et angle BAC = angle BCD = angle EDC; en même temps angle DCA = angle ECD; donc triangle DAC semblable à triangle EDC, conséquemment DE = DC, donc AB : BC = AD : DE = AC : CD, c. q. f. d. »

Ici l'auteur termine son traité; mais, en guise d'appendice, il y ajoute encore la discussion des cinq problèmes suivants, proposés par Albîroûnî comme pouvant également être ramenés à la trisection de l'angle.

1. Étant donné le triangle isocèle ABC (fig. 55), donner à AB un prolongement BD tel que, faisant angle ECD = angle EDC, on ait AE.EB = AB.BD.

2. Supposons un trapèze ABCD (fig. 56) dans lequel AB soit parallèle à CD, AC = BD, DE = DB, CD : BD = AB : AE. Étant connus le côté CD et les angles du trapèze, trouver les côtés AB, BD, AC.

3. Étant donné le triangle isocèle ABC (fig. 57), couper le prolongement de la perpendiculaire à la base par une transversale EZH telle que BZ = ZE et HZ = ZC.

4. Étant donné le triangle isocèle ABC (fig. 58) et la perpendiculaire à la base AD, mener une transversale BZE, de sorte que BZ = EC.

5. Le triangle ABC (fig. 59) dont l'angle B est un angle droit, et dans lequel on a joint le sommet B au point milieu D de la base, étant connu d'espèce, mener de C une ligne CZE telle que BZ : CE = BD : AC.

L'auteur résout tous ces problèmes au moyen du lemme suivant : Construire sur une base donnée un triangle tel que l'un de ses angles soit le double de l'autre, et que la somme de ces deux angles soit égale à un angle donné.

Il résout ce second lemme au moyen de celui qui lui avait

servi pour la solution de toutes les propositions qui faisaient l'objet de la partie principale de son traité. En effet, en prenant (fig. 49) CK égale à la base donnée et angle KCD égal à l'angle donné, qu'on fasse EM = EC. Dans le triangle CDE décrit sur la base donnée CD, on aura angle CED = 2.angle CDE, et la somme CED+CDE égale à l'angle donné, ce qu'il s'agissait d'obtenir.

J'abandonne aux amateurs le plaisir de trouver eux-mêmes la solution des cinq problèmes d'Albîroûnî, ce qui sera d'autant plus facile, que je viens d'en indiquer le moyen.

A ce traité de la trisection de l'angle je vais joindre encore un cas particulier de ce problème, dans lequel il sera intéressant de constater que les Arabes ont reconnu qu'il dépend d'une équation du troisième degré.

En effet, la troisième d'une suite de questions proposées par Albîroûnî à Aboûl Djoûd, et dont j'ai fait connaître la première dans l'addition D, est conçue de la manière suivante : « Pourquoi nous avons dit, dans la septième proposition du septième chapitre du quatrième livre de notre traité de géométrie, qu'au moyen de cette proposition (*) on peut construire algébriquement l'ennéagone. »

Dans sa réponse Aboûl Djoûd considère la corde AB (fig. 60) qui sous-tend la neuvième partie de la circonférence d'un cercle circonscrit au triangle isocèle ABC. Il prend AD = AB, ED = AD, EZ = ED. En considérant les angles aux bases des différents triangles isocèles ainsi formés, on trouve CZ = AB(**)

---

*) L'auteur dit, à la fin de sa réponse, que cette proposition contenait la construction de l'équation : « des racines sont égales à un cube plus un nombre ».

**) Généralement, si l'on prend angle ACB = $\frac{360^0}{n}$, n étant un nombre entier de la forme $4m+2$, on arrivera toujours au sommet de l'angle en plaçant ainsi la corde sous-tendante successivement m fois entre les deux côtés de l'angle.

et EA = AB. Abaissant les perpendiculaires AT, ZK, on aura CZ : CK = CA : CT, donc CZ : CE = CA : 2.CT; conséquemment CZ : (CZ + CE) = CA : (CA + 2.CT) ou AB : (EA + CE) = CA : (CB + | CB + CD |), c'est-à-dire AB : CA = CA : (CD + 2.CB). Arrivé là, le géomètre arabe pose AC = 1 et AB = x, et obtient ainsi $x.(CD+2)=1$; mais de la similitude des triangles ABC, BDA il suit AC.BD = $\overline{AB}^2$; donc BD = x^2, et CD = $1 - x^2$, ce qui, substitué dans l'équation qu'on vient d'obtenir, donne $x^3 + 1 = 3x$ (*).

Pour construire le côté de l'heptagone inscrit au cercle (**), les Arabes employaient des considérations tout à fait analogues à celles qui précèdent.

J'en trouve l'exposé dans une réponse anonyme à la question suivante, proposée par Aboû Beqr Mohammed Ben Yakoûb Alchamsi : Déterminer dans un triangle rectangle le rapport d'une cathète à l'autre, l'angle opposé à la première des deux cathètes étant donné.

L'auteur fait observer d'abord qu'on peut résoudre ce problème approximativement, au moyen de la table des cordes.

Ensuite il détermine les valeurs exactes du rapport mentionné, en faisant l'angle connu successivement égal aux différents sous-multiples d'un angle droit.

Désignant par B le sommet de l'angle droit, par C le sommet de l'angle connu α, et le troisième sommet par A, le géomètre arabe trouve :

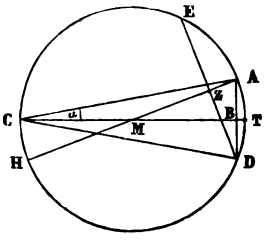
Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{2}$	AB : BC = 1 : 1	AB : AC = 1 : $\sqrt{2}$
Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{3}$	AB : BC = 1 : $\sqrt{3}$	
Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{4}$	AB : BC = 1 : $(1+\sqrt{2})$	$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = 1 : (4+\sqrt{8})$
Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{5}$	$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = 1 : (5+\sqrt{20})$	AB : AC = 1 : $(1+\sqrt{5})$
Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{6}$	AB : BC = 1 : $(2+\sqrt{3})$	AB : AC = 1 : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{8}$	il démontre que le rapport du carré de AD = 2AB, au carré du	

---

*) C'est ce que devient, en effet, l'équation $4(\sin\frac{1}{3}v)^3 + \sin v = 3\sin\frac{1}{3}v$ pour $v = 30^\circ$, lorsqu'on pose $x = 2(\sin\frac{1}{3}v)$.

**) L'équation que je déduis ci-dessous (p. 127, lig. 13 en rem.) des relations données par le géomètre arabe, est la même que celle à laquelle Viète ramène cette construction; en même temps Viète se sert, pour arriver à cette équation, de considérations très-semblables à celles du géomètre arabe. Voir *Francisci Vietæ* opera mathematica, in unum volumen congesta, operâ et studio Francisci à Schooten. Lugduni Batavorum, 1646, fol., pag. 362, protasis IV. Dans l'équation qui se trouve à la fin de cette proposition (pag. 363, lig. 14 en rem.), on lit, par suite d'une faute d'impression, + 2N au lieu de — 2N.

diamètre AH du cercle circonscrit au triangle ACD (*), est égal au rapport $(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) : 2$; que l'on a $CB \cdot BT = \overline{AB}^2$, $CB + BT = CT$; et que, conséquemment, CB, BT et le rapport AB : BC sont connus.

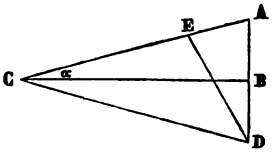


Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{10}$ il divise le rayon du cercle circonscrit au triangle ACD en moyenne et extrême raison. Alors il a la partie majeure = AD = 1, la partie mineure $= \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, $MT = \frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} = AM$, $AB = \frac{1}{2}$; donc $\overline{MB}^2 = 1\frac{1}{4} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$; et, MB étant connu, BC, AB : BC, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, AB : AC, seront également connus.

Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{7}$ il démontre, en faisant AB = BD et DE = AD, que

AE : AD = AD : AC,

AD : CE = AC : (AC + CE).



Pour $\alpha = \frac{90^\circ}{9}$ il démontre que

AE : AD = AD : AC =

= AC : (2AC + CE).

La démonstration du cas $\alpha = \frac{90^\circ}{9}$ est absolument identique avec celle que je viens de donner ci-dessus d'après Aboûl Djoûd; et pour la démonstration du cas $\alpha = \frac{90^\circ}{7}$, l'auteur se sert également d'un procédé parfaitement analogue à celui employé par Aboûl Djoûd pour la construction du côté de l'ennéagone.

Or, en faisant, comme ci-dessus, AC = 1, AD = x, les deux relations données pour $\alpha = \frac{90^\circ}{7}$ se transforment dans $AE = x^2$, $(1 - x^2) = x(2 - x^2)$; donc $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; on voit donc que la construction de l'heptagone inscrit au cercle dépend d'une équation du troisième degré, ou de l'intersection de deux coniques.

Et en effet, dans l'introduction de ce mémoire, l'auteur s'exprime ainsi :

« Lorsque, par exemple, on aura déterminé les deux côtés renfermant l'angle droit dans un triangle dont un des deux autres angles est égal à la septième partie d'un angle droit, on peut facilement construire la corde de la septième partie de la circonférence, dont la détermination n'avait pu être obtenue jusqu'à nos jours, jusqu'à ce qu'Aboû Sahl Alqoûhî (**) et moi nous l'ayons construite au moyen des sections coniques. » Puis, après avoir terminé la discussion du cas $\alpha = \frac{90^\circ}{7}$, l'auteur ajoute : « Et c'est au moyen de cette proposition que j'ai construit l'heptagone inscrit au cercle. »

---

*) La corde DE, qui est perpendiculaire au diamètre AH, est prise pour unité dans ce cas.

**) Comparer pag. 55, lign. 20.

ERRATA ET CORRIGENDA.

TEXTE ARABE. En plusieurs endroits des lettres se sont cassées, et des points et des filets superposés sont tombés pendant le tirage. Il faut y suppléer comme suit : P. 11, l. 11 فلنقل. — P. 14, l. 11 الاجذار. — P. 15, note 19 سطح. — P. 17, l. 1 ونتمم. — P. 19, l. 1 ابجد. — P. 23, l. 1 بط. — P. 23, l. 15 هح. — P. 25, l. 19 يكون. — P. 31, l. 2 المجسم. — P. 32, note 5 المفروضة. — P. 46, l. 2 مال. — P. 48, l. 1 اظن. — P. 52, l. 9 وحج. — On remarquera quelquefois des ط qui ressemblent à des ظ ; c'est qu'on ne fond que des ظ dont on enlève ensuite les points avec le couteau. Des traces de ces points imparfaitement enlevés, qui étaient absolument invisibles dans les épreuves, ont reparu dans le tirage.

TRADUCTION. Dans la 1re feuille, on a imprimé binome, trinome, etc., au lieu de binôme, trinôme.

P. 41, l. 3 en rem., au lieu de $\overline{BD}$ il faut lire $\overline{BD}^2$.

P. 56, l. 6. L'ouvrage 8 traitait probablement du problème suivant : Étant donnés un faisceau de trois droites issues d'un point B et un point E, faire passer par E une transversale qui coupe les trois droites respectivement aux points A, D, C, de manière que le rapport AE : CD, ou le rapport EC : AD, soit égal à un rapport donné. Je trouve cet ouvrage mentionné dans un mémoire d'Aboûl Djoûd, où ce géomètre se propose de compléter le travail d'Alqoûhî par la considération du cas ED : AC = const.

P. 56, l. 22, au lieu de P et A il faut lire 2 P et 2 A.

P. 75, l. 13 en rem. La leçon قرسطون est bonne. Le Târîkh Alhoqamâ attribue à Kostâ Ben Loûkâ un كتاب القرسطون, ce que Casiri traduit par « De Musica Liber ». Le mot قرسطون est évidemment la transcription arabe du mot persan كرستون ou كرستوان, que Richardson traduit par « a large public weighing-engine ». Peut-être aussi faut-il lire فرسطون, mot persan que Richardson traduit par « a public standard of weights or measures ».

P. 76, l. 9, au lieu de المحركة il faut lire المتحركة.

من كتاب تأريخ الحكمآء
للقاضى الاكرم جمال الدين ابن القفطى

عمر الخيام امام خراسان * وعلامة الزمان * يعلم علم اليونان * ويحث على طلب الواحد الديان * بتطهير الحركات البدنية * لتنزيه النفس الانسانية * ويأمر بالتزام السياسة المدنية * حسب قواعد اليونانية * وقد وقف متأخروا الصوفية * مع شىء من ظواهر شعره فنقولها الى طريقتهم * وتحاضروا بها مجالساتهم * وخلوتهم * وبواطنها حبات الشريعة الواسع * ومجامع للاغلال جوامع * ولما قدح اهل زمانه فى دينه * واظهروا ما اسره من مكنونه * خشى على دمه * وامسك من عنان لسانه وقلمه * وحبر ملاقاة لا تقية * وابدا اسرارا من السرار غير نقية * ولما حصل ببغداد سعى اليه اهل طريقته فى العلم القديم * فسد دونهم الباب سد النادم لا سد النديم * ورجع من حجه الى بلده يروح الى محل العبادة ويغدو * ويكتم اسراره ولا بد ان تبدو * وكان عديم القرين فى علم النجوم والحكمة * وبه مضرب المثل فى هذه الانواع لو رزق العصمة * وله شعر طائر تظهر خفياته على خوافيه * ويكدر عرق قصده كدر خافيه * شعر

اذا رضيت نفسى بيسور بلغة يحصلها بالكد كفى وساعدى
أمنت تصاريف الحوادث كلها فكن بازمانى يدى (١) او مواعدى
اليس قضى الافلاك فى مورها بان تحيد الى نحس جميع المساعدِ
فيا نفس صبرا فى مقيلك انما تخر ذراه بانقباض القواعدِ

(١) Le Ms. porte موعدى. Dans le premier hémistiche du vers suivant, le Ms. porte الافلاك فى مورها pour لافلاك فى مروزها ce que j'ai changé dans satisfaire au mètre.

الحكم فافهمه ولو اردت ان تجد امثلة عددية لامكنك (١) ذلك وهذه (٢) المسئلة هي (3) اضافة (4) مجسم الى خط مفروض ننقص عن تمامه مكعبا ويكون مساويا لمجسم آخر مفروض فان كان ضلع المكعب المساوى للمجسم المساوى مثل نصف الخط او اصغر فان ذلك واجب وان كان (5) اعظم فانه يمكن ان يقع فيه ما يستحيل بحسب ما بيناه لك (6) والله الميسر لحل هذه العويصات بمنه وكرمه

تمت الرسالة ظهيرة يوم الاحد الثالث والعشرين
من شهر ربيع الاول سنة ٩٥٥ والحمد
لله وحده وكفى فسلامه على عباده الذين اصطفى

---

(١) لا يمكنك C. — (٢) من هذه A. — (3) هو C. — (4) اضافه A. — (5) كان manque dans A. — (6) ما قد بيّنا ذلك C. Ici suit dans le Ms. C. le passage relatif à la publication des ouvrages d'Aboûl-Djoûd هذا وقد حكى لى etc. (voyez pag. ٣٦ note ١٤), jusqu'à فى كل حال après quoi le Ms. C. se termine en ajoutant la formule وحسبنا الله ونعم الوكيل.

مثل نسبة بج الى زا فنسبة زب الى زح كنسبة بج الى زا وبالتبديل كذلك فالخطوط الاربعة متوالية زب بج زح زا فيكون مربع زح مثل ضرب بج فى زا وبج هو الضلع القائم للقطع المكافى الذى سهمه اب ورأسه ا فيكون زح من خطوط الترتيب (1) فنقطة ح اذن على محيط المكافى لا محالة وقد كانت على محيط الزائد فهما اذن متلاقيان فقد ظهر خطاء ابى الجود فى قوله (2) ان القطعين لا يتلاقيان وذلك المراد (3) ولكى (4) يكون اظهر فانا نضع (*) اب ثمانين وبج الذى هو ضلع المكعب المساوى للعدد احدا (5) واربعين وهو اعظم من اج فنقطة د تقع من خارج القطع المكافى فليمر المكافى على ل فيكون خط لج جذر ألف وخمس مأية وتسعة وتسعين وهو اربعون (6) الا شيئا يسيرا ونجعل (7) طج مثل جب وبح مثل بط ونصل طح (8) فهو يماس القطع الزائد كما بيناه ونفصل اك ربع اج ونخرج منه عمودا يقطع القطع على (9) نقطة م فيكون نسبة مربع لج الى مربع كم كنسبة اج الى اك لانهما خطان من خطوط ترتيب (10) المكافى وقد بينه ابلونيوس فى شكل يط من مقالة ا فيكون كم نصف لج وهو عشرون الا شيئا يسيرا وجط (11) احدا (12) واربعين واك تسعة وثلاثة (13) ارباع واط اثنان فيكون خط كز احد عشر وثلاثة ارباع لان نسبة كز الى كط كنسبة حب الى بط وهما متساويان فخط زم يكون اعظم من ثمانية وهو فى داخل الخط المماس للزائد (14) فهو (15) فى هذا الوضع يكون فى داخل القطع الزائد لا محالة نعم قد يكون القطعان غير متلاقيين اذا كان بج اعظم من جا لكن ذلك غير واجب فى جميع الانواع فقد ابطل ابو الجود فى هذا

---

(1) التركيب C. — (2) فى قوله manque dans A. — (3) Ici le Ms. C. ajoute اما قوله etc. (voyez pag. ٤٩ note 6). — (4) لكى sans و C. — (5) واحد A. احد C. — (6) الاربعون C. — (7) ونحصل A. ويجعل C. — (8) طه A. C. — (9) وعلى A. — (10) الترتيب C. — (11) وخط A. — (12) احد A. C. — (13) ثلثين C. — (14) الزائد A. — (15) وهو C.

(*) Voy. Fig. 30, 3.

يماس (1) القطع الزائد فيلزم ان يكون المكافى قاطعا للزائد لا يجوز ان يكون بينه وبين الخط المماس له لانه لو كان مماسا له لكانت الخطوط الخارجة من نقطة د الى اية (2) نقطة فرضت على محيط اد واقعة بين القطع وبين (3) الخط المماس له وذلك محال فباضطرار ان يكون المكافى يقطع الزائد على نقطة أخرى فيما بين ا د وذلك ما اردنا ان نبين فهذا وجه خطاء هذا الفاضل فى قوله ان القطعين يجب ان يكونا متماسين (4) على د واما قوله اذا كان بج اعظم من جا فان المسئلة مستحيلة وذلك لان القطعين لا يتلاقيان كلام باطل بل يجوز ان يتلاقيا بالتقاطع او بالتماس على نقطة او نقطتين فيما بين ا د (5) كما بيناه هناك (6) وعليه برهان اعم مما ذكرناه (7) فليكن (*) عدة الاموال اب وضلع المكعب بج وهو اعظم من نصف اب ونتمم (8) جه ونعمل القطعين كما قد (9) عرفته وليكن اب عشرة وزب ستة فيكون ضرب مربعه فى زا مأية واربعة واربعين وهو العدد وضلعه بج ولا محالة ان بج اعظم من خمسة لان مكعب خمسة مأية وخمسة (10) وعشرين فالمجسم الذى قاعدته مربع زب وارتفاعه زا مثل (11) مكعب بج فقاعدتاهما اذن (12) مكافيتان لارتفاعيهما (13) اعنى يكون نسبة مربع زب الى مربع بج كنسبة بج الى زا ونخرج من ز عمودا يقطع القطع الزائد على نقطة ح ونتمم (14) حب فسطح حب مثل جه فاضلاعهما متكافية اعنى نسبة زب الى بج كنسبة بج الى زح فيكون نسبة مربع زب الى مربع بج كنسبة زب الى زح وقد كانت تلك النسبة

---

(1) مماس C. — (2) الى ا A. — (3) و sans بين C. — (4) مماسين C. — (5) Au lieu de فيما بين ا د le Ms. A. porte اذ. — (6) Dans le Ms. C. tout ce passage à partir de واما قوله manque ici et se trouve inséré plus bas (voyez pag. 50 note 3). — (7) ذكرنا C. — (8) نتم A. يتم C. — (9) قد manque dans C. — (10) خمسمايه وخمس C. — (11) مثل manque dans A. — (12) اذن manque dans A. — (13) لارتفاعهما C. — (14) ونتم A. ونتم C.

(*) Voyez Fig. 30, 2

هذا الفاضل (١) فاني ظن لم آل جهدا في الاستيفاء مع الانجاز (٢) وتجنب التطويل المبرم ولو شيت لأتيت بمثال لكل واحد من هذه الاصناف وانواعها لكني خشيت التطويل (3) فاقتصرت على هذه القوانين (4) الكلية تعويلا على ذهن المتعلم لان من يكون ذهنه بحيث يتصور (5) هذه الرسالة لا يقصر عما يرومه من الامثلة الجزئية (6) واستقرآئها والله الموفق للصواب وعليه المعول في كل حال

وبعد فان واحدا من اصحابنا اقترح علينا ان نبين خطاء ابي (7) الجود محمد بن الليث في الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية التي تنحل بالقطوع وهو مكعب وعدد يعدل اموالا قال ابو الجود نضع (*) عدة (8) الاموال خط $\overline{اب}$ ونفصل منه ضلع مكعب مساو للعدد وهو $\overline{بج}$ فخط (9) $\overline{بج}$ اما ان يكون مثل $\overline{جا}$ او اعظم منه او اصغر قال (10) اذا كان مثل $\overline{بج}$ فانا نتمم (11) (**) سطح $\overline{جه}$ ونعمل على $\overline{د}$ قطعا زائدا لا يلقاه $\overline{اب}$ به ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة $\overline{ا}$ وسهمه $\overline{اب}$ وضلعه القايم $\overline{بج}$ فيمر القطع لا محالة على نقطة $\overline{د}$ كما بيناه ثم زعم ان القطعين يتماسان على نقطة $\overline{د}$ واخطأ لانه يجب (12) ان يكونا (13) متقاطعين برهانه انا نجعل $\overline{بز}$ مثل $\overline{با}$ ونصل (14) $\overline{از}$ فهو يمر على $\overline{د}$ لا محالة ويكون في داخل القطع المكافي ويكون زاوية $\overline{ادب}$ قايمة وزاوية $\overline{ابد}$ مثل زاوية $\overline{زبد}$ ومعلوم ان سهم القطع الزائد يقسم الزاوية المحيطة (15) بالقطع بنصفين فيجب ان يكون خط $\overline{بدط}$ سهم (16) القطع الزائد الذي على $\overline{د}$ وخط $\overline{اد}$ مواز لخطوط الترتيب فهو

---

(1) Ces mots à partir de حقا manquent dans C. — (2) مع انجار C. — (3) Ce passage à partir de المبرم manque dans C. — (4) القوانين manque dans C. — (5) يتصور C. — (6) الجزوية C. — (7) ابو C. — (8) هذه C. — (9) وفخط C. — (10) قال manque dans C. — (11) نتم A. C. — (12) يخب C. — (13) يكونان C. — (16) سهم manque dans C.

(*) Voyez Fig. 30. — (**) Voyez Fig. 30, 1.

هذا وقد حكى لى بعض من شدا شيئا نزرا من الهندسة بعد تأليفى (١) هذه الرسالة بخمس سنين ان لابى الجود محمد (٢) بن الليث المهندس رحمه الله (3) كلاما فى تعديد (4) هذه الاصناف وتحليل اكثرها الى القطوع المخروطية من غير استيفاء جميع انواعها وتمييز (5) الممكن من المستحيل بل بحسب ما تأدى به النظر فى المسائل الجزئية (6) اليها فلم استبعد ذلك لان هذين الصنفين اللذين (7) نسبتهما (8) الى واحد ممن تقدمنا منسوبان اليه وقد تصفحهما (9) فى جملة تصنيفات ابى الجود بخط الحازمى الخوارزمى واحدهما من الثلاثيات وهو مكعب وعدد يعدل اموالا وله انواع ولانواعه شرائط كما هو مذكور فى هذه الرسالة ولم يستوف شرائطها ثم ابطل فى حكمه ايضا فى هذا الصنف بقوله ان كان ضلع المكعب المساوى للعدد اعظم من نصف عدة الاموال استحالة المسئلة وليس كذلك كما (10) بيناه وذلك بسبب انه لم يتفطن لتماس القطعين او لتقاطعهما (11) فى ذلك الجانب الآخر والثانى من الرباعيات وهو مكعب وعدد واضلاع تعدل اموالا فلعمرى انه قد احسن فى الوقوف على هذه المسئلة بعد ما اعيت (12) جماعة من المهندسين لكنه مسئلته جزئية (13) وللصنف انواع وشرائط فان فى مسائله ما يستحيل فلم يستوفها حق الاستيفاء وانما ذكرت هذا ليقابل (14) من يصل اليه الرسالتان (15) ان كان ما (16) حكى لى من حال هذا الفاضل حقا بين رسالتى هذه والمنسوبة الى

---

pag. o\ lign. 5), y suit immédiatement après les mots لم يكد يخفى عليه من المسائل المعتاصة على المتقدمين [شىء] et précède cet autre récit. — (١) Le Ms. A. porte بعدنا à la fin d'une ligne et au commencement de la suivante لسفى; le Ms. C. porte تاليف sans ى. — (٢) محمد manque dans C. — (3) رحمه الله manque dans A. — (4) تعديل C. — (5) وتميز C. — (6) الجزئية A. الجزرنة C. — (7) الذين C. — (8) نسبتهما A. بسيبنهما C. — (9) وقد شاهدتها A. — (10) لما A. — (11) لم يفطن التماس القطعين او ليتقاطعهما C. — (12) اعييت C. — (13) لكن مسالته جزوية C. — (14) التقابل C. — (15) الرسالتا C. — (16) ان كان على ما A.

الوجوه مثاله اذا قيل مال وجذران يعدل اثنين من العدد (١) وجزء (٢) مال فان هذا لا يمكن ان يستخرج لان المال هو الثانى وجزء المال هو السادس فقد تعدى الى خمس مراتب فقس عليه سائره

فجميع الاصناف المفردة بين هذه السبع المراتب (3) احدا وعشرين (4) منها اثنان لا يمكن ان يستخرج بطريقنا بل يحتاج فيها الى مقدمة ابن الهيثم (5) فيبقى تسعة عشر صنفا يستخرج بطريقنا (6) بعضها بخواص الدائرة وبعضها بخواص القطوع وجميع المركبات الثلاثية المتوالية خمسة عشر ويستخرج بخواص الدائرة وجميع المركبات الثلاثية (7) فى كل اربع (8) متوالية اربعة وعشرين ويستخرج بخواص القطوع وجميع المركبات الرباعية بين كل اربع مراتب متوالية ثمانية وعشرين ويستخرج بخواص القطوع فجميع الاصناف الواقعة بين هذه السبع المراتب التى (9) يمكن استخراجها بالطرق التى بيناها ستة وثمانين (10) لم يذكر(١١) فى كتب المتقدمين منها الا ستة اصناف فمن وقف على هذه المقدمات المذكورة واتفق له مع ذلك قوة فى الطبع ودربة (١٢) فى المسائل لم يكد يخفى عليه من المسائل المعتاصة على المتقدمين شىء (13) فقد حان لنا ان نختم هذه الرسالة حامدين لله تعالى ومصلين على انبيائه اجمعين (14)

---

(١) A. العددس — (2) C. وجزوى — (3) C. السبع مراتب — (4) A. ٢١ — (5) C. الهيثم A. الهدم — (6) C. بطرقنا — (7) Ce passage à partir de المتوالية manque dans C. — (8) C. اربعة — (9) C. الدى — (10) A. ٨٦ وردته — (11) C. تذكر A. بذكر — (12) C. ستة وثمانون A. ودربه — (13) شىء manque dans C. — (14) Ce passage à partir de فقد se trouve dans le Ms. C. plus haut, et y est conçu d'une manière un peu différente (voyez pag. ٤٢ note 1). De même toute la suite, jusqu'à la fin de l'ouvrage, est différemment arrangée dans le Ms. C. Le récit relatif à la publication des découvertes d'Aboûl-Djoûd qui suit ici (à partir des mots هذا وقد etc. jusqu'aux mots فى كل حال pag. ٤٨ lign. 6), s'y trouve transposé à la fin de l'ouvrage, tandis que l'exposition des erreurs commises par ce géomètre (بحسب ما قد بيناه لك etc. pag. ٤٨ lign. 7, jusqu'à وبعد فان واحدا

استخراجها بطرقنا (1) وبالجملة فان ضرب الاول فى السادس من هذه السبع (2) المراتب يحتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة (3) على نسبة واحدة كما بينه ابو على ابن (4) الهيثم (5) رحمه الله تعالى (6) واما اذا قيل اى مكعب يعدل ستة عشر جزء (7) ضلعه فيضرب الاول فى الخامس فيكون جذر جذر المبلغ هو ضلع المكعب المطلوب وعلى هذا القياس كل ما يعادل من هذه السبع المراتب خامسه فى (8) النسبة واما فى المركبات مثل جذر يعدل واحدا وجزءى (9) جذر فهو فى قوة مال يعدل جذرا واثنين من العدد لان هذه الثلاثة مناسبة (10) للثلاثة المذكورة فنستخرجه بالطريقة المذكورة يخرج المال اربعة وهو يعدل جذره مع اثنين من العدد فجذر هذا هو المطلوب وجذره اثنان وهو يعدل واحدا (11) مع جزءى (12) جذره وكذلك ان (13) قيل مال وجذراه يعدل واحدا وجزءى جذر يكون فى قوة كعب ومالان (14) يعدل جذرا واثنين (15) فنستخرج ضلع المكعب (16) كما بيناه بالقطوع المخروطية فيكون مربع ذلك الضلع هو المال المطلوب وكذلك ان قيل جذر واثنان من العدد (17) وعشرة اجزاء جذر يعدل عشرين جزء مال فيكون فى (18) قوة كعب ومالان (19) وعشرة اجذار يعدل عشرين عددا فنستخرج ضلع المكعب بالطريق المخروطى فيكون هو الجذر المطلوب وبالجملة فكل اربع (20) مراتب متوالية من هذه المراتب السبع يكون حكمها فى حكم الاصناف الخمسة والعشرين المذكورة فاذا تعدى الى خمس مراتب او ست مراتب او سبع مراتب (21) فان ذلك لا يمكن ان يستخرج بوجه من

---

(1) طريقنا C. — (2) السبعة C. — (3) الستة manque dans A. — (4) بن A. — (5) الهيثم C. — (6) رحمه الله تعالى manque dans A. — (7) جزاو — (8) فى manque dans C. — (9) وجزوى C. — (10) متناسبة C. — (11) واحد C. — (12) جزء فى A. — (13) ان manque dans C. — (14) ومال C. — (15) اثنان C. — (16) الكعب A. — (17) الضلع C. — (18) فى manque dans C. — (19) ومالين C. — (20) اربعة C. — (21) مراتب manque dans A.

يمكنك ان تتفطن له ولا نطول (١) به القول واما معادلة هذه الاربعة بالاربعة المتقدمة فكما ابين اذا قيل كعب يعدل عشرة اجزاء كعب (٢) اى عشرة اجزاء نفسه فالكعب هو الاول من المراتب السبع واجزاء الكعب هو السابع منها (3) فاضرب احدهما (4) فى الآخر وخذ (5) جذر المجتمع فما خرج فهو الواسط (6) اعنى الرابع وهو المكعب المطلوب وتفصيل هذا الكلام ان كل عدد اذا ضرب فى جزئه (7) المسمى له خرج الواحد وان ضرب فى جزءيه (8) خرج اثنان وان (9) ضرب فى عشرة اجزائه يخرج عشرة من العدد فكانه قيل فى مسئلتنا اى كعب (١٠) اذا ضرب فى مثله كان عشرة فجذره هو المكعب المطلوب ثم استخراج ضلع ذلك المكعب هو على ما بيناه بالقطوع المخروطية وكذلك اذا قيل اى مال يعدل ستة عشر جزءا من اجزائه السمية له فاضرب الواحد فى ستة عشر وخذ (١١) جذر المبلغ وهو اربعة فيكون هو المال المطلوب فكانه قيل (١٢) اى مال ضربته فى مثله يكون ستة عشر على القياس المتقدم وكذلك اذا قيل اى جذر يعدل اربعة اجزائه فكانه قيل اى عدد اذا ضربته فى مثله حصل اربعة وهو اثنان واما (13) اذا قيل اى مال يعدل عدة اجزاء مكعب ضلعه فان استخراج ذلك لا يمكن بالطرق (14) التى بيناها اذ هو محتاج الى ايراد اربعة خطوط بين (15) خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة وذلك قد بينه ابو على ابن (16) الهيثم (17) رحمه الله تعالى (18) الا انه صعب جدا لا يمكن ان يلحق بكتابنا هذا وكذلك ان قيل اى مكعب يعدل عدة اجزاء مال ضلعه (19) يحتاج الى المقدمة المذكورة فلا (20) يمكن

---

(١) لها فلا يطول C. — (2) كعب manque ici dans C. et s'y trouve ajouté après نفسه. — (3) منها manque dans C. — (4) احديهما C. — (5) وخذ A. يوجد — (6) الواسطه A. — (7) جزءه C. — (8) خروده A. — (9) فاذا C. — (١٠) فى sans C. — (١١) مكعب C. — (12) يوجد C. — (13) كانه يقول A. وحد — (14) بالطريق A. — (15) من C. — (16) بن A. — (17) الهيثم A. — (18) رحمه الله تعالى manque dans A. — (19) احزايها لضلعه C. — (20) ولا A.

وجزء كعب الكعب بالغا ما بلغ يكون ايضا متناسبة (1) ولا حاجة لنا الى ذكرها اذ لا سبيل الى استنباطها واعلم انك ان اخذت الثمن الذى هو جزء الكعب كعبا (2) فيكون جزؤه ثمانية (3) الذى هو الكعب بالعكس (4) فقس عليه سائره فجزء الكعب وجزء المال وجزء (5) الجذر والواحد هذه (6) الاربعة تكون فى حكم الكعب والمال والجذر والواحد (7) مثاله اذا قيل جزء مال يعدل نصف (8) جزء جذر فكانه قيل مال يعدل نصف جذر فالمال يكون ربعا وهو جزء المال فالمال المطلوب يكون اربعة وجزؤه (9) الربع وجزء جذره النصف وعلى هذا القياس فى مفرداته واما فى المركبات اذا قيل جزء مال وجزءا جذر يعدل واحدا (10) وربعا فكانه قيل مال وجذران يعدل واحدا (11) وربعا فبالطريق الذى بيناه نخرج الجذر نصفا والمال ربعا (12) الا انه بموجب السؤال جزء مال وجزءا جذر (13) فيكون الربع الذى هو المال الاول جزء المال المطلوب فيكون المال المطلوب (14) اربعة وكذلك فى الرباعيات اذا قيل جزء كعب وثلاثة اجزاء مال وخمسة اجزاء جذر يعدل ثلاثة وثلاثة اثمان وكانه قيل كعب وثلاثة اموال وخمسة اجذار يعدل ثلاثة وثلاثة اثمان فبالطريق الذى بيناه بالقطوع المخروطية يتبين ضلع الكعب فيكون هو جزء الجذر المطلوب فنجعل نسبته الى الواحد المفروض كنسبة الواحد المفروض الى خط آخر فيكون ذلك الخط هو ضلع الكعب المطلوب فقد لاح انه يكون خمسة وعشرون صنفا أخرى من هذه المعادلات بين هذه الاربعة متناسبة للخمسة والعشرين (15) صنفا المتقدمة

واما ضرب بعضها فى بعض فمعلوم ظاهر من كتب الجبريين وانت

---

(1) مناسبة C. — (2) كعبا manque dans A. — (3) A جزءه ٨ C. جزء وثمنيه — (4) ب sans C. العكس — (5) وجزؤ A. — (6) فهذه C. — (7) والواحد A. C. — (8) نصف C. — (9) وجزءه A. — (10) واحد C. — (11) واحد C. — (12) اربعا C. — (13) جذر مال وجزوا جذر A. — (14) فيكون C. — (15) والعشرون manque dans C. المال المطلوب

القانون فى معرفة الممكن من المستحيل فى مسائل ما يقع فيه المستحيلات وبينا ان اكثرها لا يقع فيه المستحيلات (١) فلنقل على اجزائها

جزء الشىء (٢) هو عدد نسبته الى الواحد كنسبة الواحد (3) الى ذلك الشىء فان كان الشىء ثلاثة كان جزؤه ثلثا وان كان الشىء ثلثا كان جزؤه ثلاثة وكذلك ان كان اربعة كان جزؤه ربعا وان كان ربعا كان جزؤه اربعة وبالجملة فان جزء كل عدد هو الجزء السمى (4) لذلك العدد كالثلث من الثلاثة ان كان العدد صحيحا والثلاثة من الثلث ان كان العدد كسورا (5) وكذلك جزء المال هو (6) الجزء السمى (7) لعدده صحيحا كان اوكسورا (8) وكذلك جزء الكعب ولكى يكون اظهر للحس (9) فانا نضعها فى لوح

جزء (١٠) الكعب *	جزء المال *	جزء الجذر *
١	١	١
٨	٤	٢

الواحد *	الجذر *	المال *	الكعب *
١	٢	٤	٨

فنسبة جزء الكعب الى جزء المال كنسبة جزء المال الى جزء الجذر وكنسبة جزء الجذر الى الواحد وكنسبة الواحد الى الجذر وكنسبة الجذر الى المال وكنسبة المال الى الكعب فهذه سبع (١١) مراتب متوالية على نسبة واحدة ونتكلم فى معادلاتها لا غير واما (١٢) جزء مال المال وجزء مال الكعب

---

(١) Ici le Ms. C. ajoute le passage suivant فقد حان لنا ان نختتم هذه الرسالة حامدين لله تعالى مصلين على خير الانبياء محمد وآله اجمعين (2) — A. التى (3) — voyez pag. ٤٦ note 14. وادن كما اتى هذه الاصناف C. ان كان كسرا (5) — C. المسمّى (4) — manque dans A. كنسبة الواحد (6) و A. — (7) المسمى C. — (8) كسرا A. — (9) للحس C. — (10) Le Ms. A. porte حرو الكعب * حرو المال * جر الجذر (11) — . لا évidemment par suite d'une méprise, au lieu du chiffre ٧. — (12) امّا C. و sans

الذى ارتفاعه بآ وقاعدته مربع بد (١) الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه به الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب به المفروضة مع عدة اموال مكعب به المفروضة مساويا لمكعب به مع العدد المفروض وان كان سن مثل بجج فان بجج هو ضلع المكعب برهانه ان مكعب بجج مثل عدة امواله المفروضة والعدد المفروض يكون مساويا لعدة اضلاع مكعب بجج المفروضة فمكعب بجج مع العدد المفروض مثل عدة امواله المفروضة مع عدة (٢) اضلاعه المفروضة وذلك المراد ويكون ايضا مكعب بجج مع عدة اضلاعه المفروضة مثل عدة (3) امواله المفروضة مع العدد المفروض فقد داخل هذا النوع الصنف الثانى وان كان سن اعظم من بجج فانا نجعل (*) بآ مثل سن ونتمم (4) السطح ونعمل القطع الاول على آ والثانى ايضا على آ وهما متقاطعان فان التقيا (5) مرة ثانية اما بالتماس فعلى نقطة واحدة واما بالتقاطع فعلى نقطتين كما هو معروف من مقالة ذ (6) من كتاب المخروطات فالمسئلة ممكنة والا فهى مستحيلة فان (7) تقاطعا فنخرج من نقطتى التقاطع عموديين يفصل ضلعين لمكعبين (8) والبرهان عليه كما تقدم لا يتغير منه شىء فبين ان لهذا الصنف انواعا وبعضها مستحيل وقد خرج بخواص قطعين زائدين وتبين ان هذه الثلاثة الاصناف الرباعية متداخلة اى يوجد نوع من الاول يكون هو بعينه نوعا من الثانى ويوجد نوع من الثانى هو (9) نوع من الثالث ويوجد نوع من الثالث هو بعينه نوع من الثانى كما بيناه

واذ قد أتينا على الاصناف (10) الخمسة والعشرين من مقدمات الجبر والمقابلة واستوفيناها حق الاستيفاء وحصلنا انواع كل صنف منها واعطينا

---

(١) Ce passage à partir de وارتفاعه هآ manque dans C. — (٢) Ces mots à partir de امواله manquent dans A. — (3) عدة manque dans C. — (4) نتم C. — (5) التقا C. — (6) ذ C. — (7) وان A. — (8) المكعبين C. — (9) وهو C. — (10) على اصناف C.

(*) Voyez Fig. 29, 2.

وقوعات (١) وانواع ونوع منها يداخل (٢) الصنف الثالث وليس فى مسائله مستحيل وقد خرج بخواص الدائرة وقطع زائد

الصنف الثالث من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية (3) هو مكعب واعداد تعدل اضلاعا واموالا نفرض (*) بجـ لعدة الاموال وبد عمودا عليه وهو ضلع مربع مساو لعدة الجذور ونعمل مجسما قاعدته مربع بد ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه سـ فخط سـ اما ان يكون اصغر من بجـ او مثله او اعظم منه وليكن اولا اصغر منه (4) (**) ونفصل من بجـ با مثل سـ ونتمم (5) بز ونعمل على نقطة آ قطعا زائدا لا يلقاه بد دز وهو قطع حاط ونعمل قطعا آخر (6) زائدا رأسه نقطة جـ وسهمه على استقامة بجـ وكل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل آجـ فهو لا محالة يقطع القطع الآخر وهو كجل فليتقاطع قطع كجل وقطع حاط على نقطة م فيكون نقطة (7) م معلومة (8) الوضع لان القطعين معلوما الوضع ونخرج منها (9) عمودى من همع فيكونان معلومى الوضع (10) والقدر فسطح (11) دآ مثل سطح دم ويكون نه مثل زة على ما بيناه مرارا (12) فاضلاعهما متكافئة وكذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع مة الى مربع ها كنسبة جة الى ها لقطع كجل فيكون نسبة مربع بد الى مربع به كنسبة جة الى ها فالمجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه ها مثل المجسم الذى قاعدته مربع به وارتفاعه جة ونجعل المجسم الذى قاعدته مربع به وارتفاعه بجـ الذى (13) هو عدة اموال مكعب به مشتركا فمكعب به مثل عدة اموالـه المفروضة مع المجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه ها ونجعل المجسم

---

(١) وقوع C. — (٢) تداخل A. يداخل C. — (3) الباقية manque dans A. — (4) منه manque dans C. — (5) يتم A. يتم C. — (6) اخرا C. — (7) نقطة manque dans A. — (8) معلوم C. — (9) منهما C. — (10) الوضع manque dans A. — (11) بسطح A. — (12) مرار C. — (13) فالذى A.

(*) Voyez Fig. 29. — (**) Voyez Fig. 29, ١.

مربع بك وارتفاعه جك لكن هذا المجسم الاخير مثل مكعب بك مع المجسم الذى قاعدته مربع بك وارتفاعه بج الذى هو عدة الاموال المفروضة والمجسم الاول مساو للمجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه اب الذى عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم (١) الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه بك الذى هو عدة اضلاع مكعب بك المفروضة فمكعب بك مع عدة امواله المفروضة مثل العدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة (٢) وذلك المراد واذا كان س مثل بج فان بد هو (3) ضلع المكعب المطلوب برهانه ان المجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه ايضا بد (4) الذى هو (5) عدة اضلاع مكعب بد مساو لمكعب بد والمجسم (6) الذى قاعدته (7) مربع بد وارتفاعه بج الذى هو عدة اموال مكعب بد المفروضة مساو للمجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه س الذى هو العدد المفروض فيكون مكعب بد مع عدة امواله (8) المفروضة مساو للعدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة وذلك المراد ومعلوم ان مكعب بد فى هذا الوقوع مع العدد المفروض مساو لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة فقد داخل هذا الصنف الصنف (9) الثالث وهو مكعب واعداد تعدل اموالا واضلاعا وان كان س اعظم من بج فانا نجعل (*) اب مثل (10) س ونعمل القطع الثانى على نقطة ج وكل واحد من ضلعيه مثل اج وهو باضطرار يقطع (11) القطع الآخر ويكون ضلع المكعب ايضا بك وباقى العمل والبرهان شبيه بما تقدم الا ان نسبة مربع حك الى مربع كا كنسبة اك الى كج (12) فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف وقوعات وانواع (13)

---

(١) مع مجسم C. — (2) Ces mots à partir de مثل sont écrits deux fois dans C. — (3) مثل هو C. — (4) وارتفاعه اب ايضا C. — (5) هو manque dans C. — (6) المجسم و sans C. — (7) قاعدة C. — (8) الاموال A. — (9) لصنف C. — (10) س C. — (11) يقع A. — (12) دك C. — (13) وانواع manque dans A. قبل

(*) Voyez Fig. 27, 2.

ان نبين وليس (١) لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا فى مسائله ما يستحيل (٢)

واذ قد أتينا على الاصناف (3) الاربعة الرباعية فلننقل (4) على الاصناف الثلاثة (5) التى كل واحد منها مركب من اثنين يعادلان اثنين الصنف الاول من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو مكعب واموال تعدل اضلاعا وعددا نضع (*) بد ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع وجب لعدة الاموال المفروضة وهو عمود على بد ونعمل مجسما قاعدته مربع بد ويكون مساويا (6) للعدد المفروض وليكن ارتفاعه س فخط س اما ان يكون اعظم من بج او اصغر منه او مساويا (7) له فليكن اولا اصغر منه (**) ونفصل من بج اب مثل س ونتمم (8) اد ولنفرض دز على استقامة بد كيف ما وقع ونعمل على دز سطحا مثل اد وهو هد فيكون ه معلومة الوضع واضلاع سطح هد كلها معلومة الوضع والقدر ونعمل على ه قطعا زائدا لا يلقاه زد دع وهو قطع هح فيكون هح معلوم الوضع ونعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة ا وسهمه اب وكل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل اج وهو قطع احط فهو يقطع القطع الآخر باضطرار (9) فليقطعه على ح فيكون ح (١٠) معلومة الوضع ونخرج منها عمودى حك حل فيكونان معلومى الوضع والقدر وسطح حد مثل هد الذى هو مثل اد ودك مشترك فسطح حب مثل ام ويكون اضلاعهما متكافئة وكذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع حك الى مربع كا كنسبة جك الى اك لكان قطع احط كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع بد الى مربع كب كنسبة جك الى اك فالمجسم الذى قاعدته مربع بد وارتفاعه اك مثل المجسم الذى قاعدته

---

(١) ليس manque dans C. — (٢) ما يستحيل manque dans C. — (3) على الاصناف C. — (4) فليقل C. — (5) الثلاثيه C. — (6) مساو C. — (7) مساو A. — (8) نتم C. — نعم A. (9) باضطرار manque dans C. — (١٠) فيكون ح manque dans C.

(*) Voyez Fig. 27. — (**) Voyez Fig. 27, 1.

تعدل مكعب نفرض (* به ضلع مربع مثل عدة الاضلاع ونعمل مجسما قاعدته (1) مربع به ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه اب عمودا على به ونفرض بج لعدة الاموال المفروضة على استقامة اب ونتمم (2) اه ونخرج (3) على استقامة به هم كيف ما كان مقداره ونعمل (4) على هم المفروض سطحا مثل اه وهو سطح هح فيكون نقطة ح معلومة الوضع ونعمل على ح قطعا زائدا لا يلقاه هم هس (5) وهو حطك فيكون معلوم الوضع ونعمل قطعا آخر (6) زائدا رأسه نقطة ج وسهمه على استقامة بج وكل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل اج وهو قطع لجط ويكون معلوم الوضع ويقطع (7) لا محالة قطع حطك فليقطعه على نقطة ط فيكون ط معلومة الوضع ونخرج منها عمودى طز طن على بج بم فيكونان معلومى القدر والوضع وطه مثل هح الذى هو مثل ها ونجعل هن مشتركا فيكون اس مثل طب فاضلاعهما متكافئة (8) وكذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع طن الى مربع ان كنسبة نج الى ان كما بيناه مرارا لمكان قطع لجط فنسبة مربع به الى مربع بن كنسبة نج الى ن فالمجسم (9) الذى قاعدته مربع به وارتفاعه ان مثل المجسم الذى قاعدته مربع بن وارتفاعه جن لكن الاول مساو للمجسم الذى يحيط به مربع به وارتفاع اب الذى عملناه مساويا للعدد مع المجسم الذى (10) قاعدته مربع به وارتفاعه بن الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب بن المفروضة فنجعل المجسم الذى قاعدته مربع بن وارتفاعه بج الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة لمكعب بن مشتركا فيلزم ان يكون مكعب بن مثل عدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة ومع العدد المفروض وذلك ما اردنا

---

(1) قاعدة C. — (2) نتم C. — (3) ونخرج manque dans C. — (4) فنعمل A. — (5) هر A. هم هر C. — (6) آخرا C. — (7) نقطع C. — (8) منافيه A. — (9) والمجسم A. — (10) الذى عملناه C.

(*) Voyez Fig. 26

لا يلقاه خطا زج جم وهو الخط الذى هو عمود على نقطة ج فان لقى القطع الدائرة بالتماس او بالتقاطع فالمسئلة ممكنة والا فهى مستحيلة والبرهان على الاستحالة ما ذكرت وقد اضطر واحد (1) من المهندسين الى هذا الصنف وقد اخرجه الا انه لم يبين اختلاف وقوعاته (2) ولم يخطر (3) بباله انه ربما يقع فيه مستحيل كما بيناه (4) فاعرفه (5) واعرف القانون الآخر فى عمل هذا الصنف وتمييز الممكن من المستحيل وهذا الصنف (6) خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع الزائد وذلك ما اردنا ان نبين واما المسئلة التى اضطرت واحدا (7) من المتأخرين الى هذا الصنف هى هذه عشرة قسمتها بقسمين (8) فيكون مجموع مربعى القسمين مع الخارج من قسمة الاعظم على الاصغر اثنين وسبعين فوضع احد القسمين شيئا والآخر عشرة الا شيئا (9) كعادة الجبريين فى امثال هذه القسمات فأدى (10) العمل الى مكعب مع خمسة من العدد وثلاثة عشر اضلاعه ونصف معادل (11) لعشرة اموال وفى هذه المسئلة بعينها يقع نقطتا ج ح داخل الدائرة فاستخرج المسئلة هذا الفاضل بعد ما اعيت هذه (12) المسئلة جماعة من فضلاء العراق ومنهم (13) ابو سهل القوهى رحمهم الله (14) الا ان هذا المستخرج رضى الله عنه (15) مع فضله وعظم قدره فى الرياضيات لم يخطر بباله هذه الاختلافات وفى (16) مسائل هذا الصنف (17) ما يستحيل وهذا الفاضل هو ابو الجود او الشنى والله اعلم (18)

الصنف الرابع من الاصناف الاربعة الرباعية هو اعداد واضلاع واموال

---

(1) واحدا C. — (2) وقوعا A. — (3) بمطر A. — (4) بساه A. — (5) فاعرف sans ه C. — (6) Ces mots à partir de وتمييز manquent dans C. — (7) واحد C. — (8) قسمين sans ب C. — (9) اشيا au lieu de الا شيئا C. — (10) فاذا C. — (11) يعادل C. — (12) هذه manque dans C. — (13) ومسهم A. منهم sans و C — (14) الفوهى sans رحمهم الله A. — (15) رضى الله عنه manque dans A. — (16) وهى فى C. — (17) الصنف manque dans C. — (18) او السنى sans والله اعلم A.

بالتماس او بالتقاطع وذلك يعلم بقليل استقرآء مع ضرب من القياس السهل تركته (١) لكى يحصل للناظرين (٢) فى رسالتى هذه الارتياض (3) فان من لا يمكنه هذا القدر من الاستنباط لا يتحقق (4) من هذه الرسالة شيئا اذ هذه الرسالة مبنية على الكتب الثلاثة التى ذكرناها ونبرهن على استحالة المستحيل منها بعكس البرهان الذى ذكرناه على الممكن وذلك ان ضلع المكعب يجب ان يكون اقصر من هب الذى هو عدة الاموال المفروضة لانه ان كان مساويا لعدة الاموال المفروضة يكون ذلك المكعب مساويا لعدة امواله المفروضة (5) فاضلا عن زيادة شىء آخر عليه من العدد او من (6) اضلاعه فان كان ضلع المكعب اعظم من عدة الاموال المفروضة كان المكعب نفسه اعظم من عدة امواله المفروضة فضلا عن زيادة شىء آخر عليه فبين انه يجب ان يكون اقصر منه فنفصل (7) مثله من بة (8) وليكن بف ونخرج من ف عمودا (9) الى محيط الدائرة ونعكس (10) البرهان الذى ذكرناه فبين ان رأس العمود يكون على محيط القطع الذى قيل (11) انه لا يمكن ان يلقى الدائرة وذلك (12) محال ولاجل انا نظن ان هذا الاستقرآء ربما يكون عسرا (13) على بعض الناظرين فى هذه الرسالة فانا نطوى (14) هذه الجملة ونأتى بقانون مغن (15) عن هذا الاستقرآء وهو انا نعمل سطحا على خط كيف ما اردنا يكون (16) على استقامة بج كيف ما وقعت (17) ج خارجا او داخلا ويكون احدى زواياه على نقطة ج ويكون مساويا لسطح اج فلا (18) بد من ان يصير اضلاعه معلومة القدر والوضع ونعمل على الزاوية المقابلة لزاوية ج قطعا زائدا (19)

---

(1) مركبة C. — (2) للناظر A. — (3) الارتياض A. الارتباض C. — (4) يحقق C. — (5) Ces mots à partir de يكون sont écrits deux fois dans C. — (6) Ces mots العدد او من sont écrits deux fois dans C. — (7) فنفصله C. — (8) بح A. C. — (9) عمود A. — (10) فبعكس C. — (11) مثل A. — (12) وذلك A. — (13) (عثيرا) عسرا A. — (14) نطوى C. — (15) مغنى C. — (16) يكون manque dans A. — (17) وقعت A. وقف C. — (18) ولا A. — (19) زايد C.

على اه ومن نقطة ل عمود لط على بز فسطح لج مثل سطح جح وجح (١) مثل جا ونجعل جك مشتركا يكون دك مثل طك فاضلاعهما متكافئة وكذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع لك الى مربع كا كنسبة هك الى كا للدائرة (٢) فيلزم ان يكون نسبة مربع بج الى مربع بك كنسبة هك الى كا فالمجسم الذى قاعدته مربع بج وارتفاعه كا مثل المجسم (3) الذى قاعدته مربع بك وارتفاعه كه لكن المجسم الاول مثل عدة اضلاع (4) مكعب بك المفروضة ومثل العدد المفروض ونجعل مكعب بك (5) مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع بك وارتفاعه به الذى هو مثل عدة اموال مكعب بك المفروضة (6) مثل مكعب بك مع عدة اضلاعه المفروضة ومع العدد المفروض وكذلك (7) يكون مكعب بق (8) بهذا البرهان هذا اذا وقع نقطتا ج ح داخل الدائرة فان وقع ح خارج الدائرة ونعمل القطع فربما (9) لقى الدائرة بالتماس او بالتقاطع [هذا النوع من هذا الصنف هو الذى ذكره ابو الجود فى استخراج المسئلة التى سنذكرها (10)] ويؤول الأمر الى ما قلنا وان لم يلق (11) القطع الدائرة فلا نزال نعمل السطح على خط اقصر من زج او اطول منه فى الوقوع الآخر فان لم يلق (12) القطع الدائرة فالمسئلة مستحيلة ويكون البرهان على استحالتها (13) بعكس ما ذكرناه وان وقع ج على المحيط او خارج الدائرة فنخرج جز (14) على استقامة ونعمل سطحا احدى (15) زواياه تكون على ج ويكون بحيث لو عمل على الزاوية (16) المقابلة (17) لزاوية ج قطع بالصفة المذكورة يلقى الدائرة

---

(١) وخرج A. — (٢) لدائرة C. — (3) المجسم manque dans C. — (4) الاضلاع C. — (5) Ces mots à partir de المفروضة sont écrits deux fois dans C. — (6) المفروض C. — (7) وكذلك manque dans C. — (8) بر A. بة C. — (9) وربما A. — (10) Ce passage à partir de هذا النوع se trouve dans A. écrit en marge et manque dans C. — (11) يكن C. — (12) يكن C. — (13) استحلتهما C. — (14) حد C. — (15) على احدى C. — (16) الزوايا C. — (17) Ici le Ms. C. ajoute encore لزاوية المقابلة.

وارتفاعه بد الذى عملناه مثل العدد المفروض مشتركا فيكون مكعب بل مع عدد امواله المفروض (١) ومع العدد (٢) المفروض مثل المجسم الذى قاعدته مربع اب وارتفاعه بل الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب بل المفروضة وذلك المراد فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقسوعات وربما يوجد (3) فى مسائله (4) ضلعان لمكعبين (5) وربما يقع فيها اعنى (6) فى مسائله مستحيل وقد خرج بخواص قطعين زائدين وذلك ما اردنا ان نبين (7)

الصنف الثالث من الاصناف الاربعة الرباعية هو مكعب واضلاع واعداد تعدل اموالا نفرض (*) خط به لعدة الاموال المفروضة وبج ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع ويكون عمودا على به ونعمل مجسما قاعدته (8) مربع بج ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه اب وعلى استقامة به ونعمل على اه نصف دائرة ازه فنقطة ج اما ان تقع داخل الدائرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولا داخل الدائرة ونخرج بج على استقامة حتى يقطع الدائرة على ز ونتمم سطح اج ونعمل على زج سطحا مساويا لسطح اج (9) وهو جح فيكون نقطة ح معلومة الوضع لان سطح جح معلوم القدر وزواياه ايضا (10) معلومة القدر وخط زج معلوم الوضع والقدر وهى اما ان تقع داخل الدائرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولا داخل الدائرة ونعمل على نقطة ح قطعا زائدا لا يلقاه زج جم فهو يقطع الدائرة على نقطتين باضطرار فى هذا الوضع فليقطعها على نقطتى ل ن فتكونان (11) معلومتى الوضع ونخرج منهما (12) عمودى لك نف

---

(1) المفروصه A. — (2) ومع عدد C. — (3) يوجد A. — (4) يوخذ C. — (5) المكعبين C. — (6) فيها اعنى sans وقع C. — (7) Au lieu de مسيلة C. — (8) قاعدة C. — (9) Ce passage à partir de حتى manque dans C. — (10) اشياء C. — (11) وتكونان A. — (12) منها A. C.

(*) Voyez Fig. 25.

ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه بد على استقامة بج ونعمل على نقطة د قطعا زايدا لا يلقاه اب اه بعد ان نتمما سطح به وهو قطع زدح ونعمل قطعا آخر زايدا رأسه نقطة د وسهمه على استقامة بد وكل واحد من ضلعيه القايم والمايل مثل دج وهو طدح ولا محالة ان هذا القطع يقطع الاول على د فان امكن ان يلتقيا على نقطة أخرى فالمسئلة ممكنة والا فهى مستحيلة هذا (1) الالتقاء بالتماس او بالتقاطع على نقطتين بناؤه (2) على المقالة الرابعة من كتاب (3) المخروطات وقد ضمنا ألّا نحيل الا على مقالتين منه ومع هذا فلا يضرنا بعد ان التقا (4) سواء كان بالتماس او بالتقاطع (5) فافهم (6) والالتقاء اما ان يكون بالتماس واما ان يكون بالتقاطع فان قطعه على غير نقطة (7) د فباضطرار يقطعه على نقطتين وبالجملة فانا نخرج من نقطة التقاطع او الالتقاء كيف ما كان وليكن نقطة ح عمودى حم كحل فيكونان (8) معلومى الوضع والقدر لان نقطة ح معلومة الوضع فسطح اح مثل سطح اد ويلقى (9) هم المشترك يبقى مد مثل هح ونجعل دح مشتركا يكون مل مثل هل فاضلاعهما متكافيّة وكذلك مربعات اضلاعهما فيكون نسبة مربع اب الى مربع بل كنسبة مربع حل الى مربع لد ولكن نسبة مربع حل الى مربع لد كنسبة جل الى لد كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع اب الى مربع بل كنسبة جل الى لد فالمجسم الذى ارتفاعه لد وقاعدته مربع اب مثل المجسم الذى قاعدته (10) مربع بل وارتفاعه لج لكن هذا المجسم الأخير مثل مكعب بل مع المجسم الذى قاعدته مربع بل وارتفاعه بج الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة ونجعل المجسم الذى قاعدته مربع اب

---

(1) والّا هذا C. — (2) بالتماس والتقاطع بناوه C. — (3) كتاب manque dans C. — (4) نضر sans le reste A. — (5) التقاطع sans ب C. — (6) Tout ce passage, à partir de هذا (lig. 6) se trouve dans le Ms. A. en marge en guise de glose se rapportant à والالتقاء qui suit ici, et qui manque dans C. — (7) مقطعة C. — (8) فيكون من C. — (9) يلقى sans و C. — (10) قاعدة C.

نقطة د داخل القطع المكافى فيتقاطع القطعان (١) على نقطتين. وبالجملة فانا نخرج من نقطة الالتقاء عمودا على آب فليكن فى الشكل الثانى طز وكذلك عمودا (٢) آخر منها على جه وهو طك فسطح اطج مثل سطح دج فيكون نسبة زج الى بج كنسبة بج الى طز وطز من خطوط الترتيب فى قطع اطل يكون مربعه مثل ضرب از فى بج فيكون نسبة بج الى طز كنسبة طز الى زا فالخطوط (3) الاربعة متناسبة نسبة زج الى جب كنسبة جب الى طز وكنسبة طز الى زا فنسبة مربع زج الاول (4) الى مربع بج الثانى كنسبة بج الثانى الى زا الرابع فيكون مكعب بج الذى هو مثل العدد المفروض مساويا (5) للمجسم الذى قاعدته مربع زج (6) وارتفاعه زا ونجعل مكعب زج (7) مشتركا فمكعب زج (8) مع العدد المفروض مساو للمجسم الذى قاعدته مربع زج (9) وارتفاعه اج الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة وذلك المراد وقس عليه الباقيين على ان الثالث يخرج منها مكعبان لا محالة لان كل عمود يفصل ضلع مكعب من جا كما تبين (10) فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقوعات وقد يقع فيها ما يستحيل وقد (11) خرج بخواص قطعين مكافى وزايد (12) معا

الصنف السادس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية هو مكعب يعدل اموالا واعدادا نفرض (*) عدة الاموال خط آب ونعمل مجسما ارتفاعه آب وقاعدته مربع ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ضلع قاعدته بج عمودا على آب ونتمم (13) سطح دب ونعمل على نقطة ج المعلومة الوضع قطعا زايدا لا يلقاه آب آد وهو قطع جهز وقطعا آخر مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه على استقامة آب وضلعه القايم آب وهو بهح فهذان القطعان

---

(1) القطس A. — (2) عمود C. — (3) الخطوط sans ف A. — الاول (4) manque dans C. — (5) مساو A. — (6) زب A. C. — (7) زب A. C. — (8) زب A. C. — (9) زب A. C. — (10) Tout ce passage, à partir de وقس manque dans C. — (11) قد manque dans A. — (12) وزوايد C. — (13) يتم A. تتم C.

(*) Voyez Fig. 22.

زيادة المكعب وان كان ضلع المطلوب اصغر منه كان ضرب اج في مربعه اصغر من العدد المفروض فيكون عدة الاموال اصغر من العدد (١) المفروض فضلا عن الزيادة وان كان الضلع اكبر من ح كان مكعبه اكبر (٢) من ضرب اج في مربعه فضلا عن زيادة العدد عليه ثم ان كان ح اعظم من اج يكون المحال في الوجوه الثلاثة الزم فيجب ان يكون ح اصغر من اج والا فالمسئلة مستحيلة فنفصل (3) بج من اج مثل ح فخط بج اما ان يكون مثل اب او اعظم منه او اصغر فليكن في الشكل الاول مثله وفي الثاني اعظم منه وفي الثالث اصغر منه (4) ونتمم (5) في الاشكال الثلاثة مربع دج ونعمل على نقطة د قطعا زائدا لا يلقاه اج جه وهو في الاول دز وفي الثاني والثالث (6) دط ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة آ وسهمه اج وضلعه القائم بج وهو في الاول اط وفي الثاني ال وفي الثالث اك ويكون القطعان معلومي الوضع ففي (7) الاول يمر القطع المكافي على نقطة د لان مربع دب مساو لضرب اب في بج فيكون د على محيط القطع المكافي ويلقاه على نقطة أخرى ويمكنك (8) ان تتفطن له بادنى تأمل وفي الثاني يكون نقطة د خارجة من محيط المكافي لان مربع دب اعظم من ضرب اب في بج فان التقى القطعان بالتماس على نقطة أخرى او بالتقاطع فيكون العمود النازل منها واقعا لا محالة فيما (9) بين نقطتي آ ب كانت المسئلة ممكنة والا فهي مستحيلة وهذا التماس او التقاطع لم يتفطن له ابو الجود المهندس الفاضل حتى جزم القضاء (10) بان بج ان (11) كان اعظم من اب كانت المسئلة مستحيلة وابطل في حكمه هذا وهذا الصنف هو الذي اضطر اليه الماهاني من بين الاصناف الستة حتى تعرف وفي الثالث يكون

---

(١) العدد manque dans C. — (٢) اكثر C. — (3) فنفصل C. — (4) منه manque dans C. — (5) ونتم A. ويتم C. — (6) وفي الثالث C. — (7) Le Ms. A. ajoute القطع. — (8) يمكنك sans و C. — (9) واقعا فيما لا محالة له C. — (10) حزم القضا A. حزم الفصا C. — (11) اذا C.

لضرب آط فى طب (١) وهو ايضا مساو (٢) لضرب بط فى مثله هذا محال فليس العمود يقع على ط (3) وكذلك لا يقع خارجا منه لانه يكون ذلك العمود حينئذ اقصر من طد فيكون هذا المحال الزم فباضطرار يقع العمود على نقطة فيما بين آ ط مثل هز ومربع هز مثل ضرب از فى بجـ فيكون نسبة از الى هز كنسبة هز الى بجـ وسطح هب مثل سطح دب كما تبين فى شكل ح من مقالة ب من المخروطات يكون نسبة هز الى بجـ كنسبة بجـ الى بز فالخطوط الاربعة متناسبة از هز بجـ بز (4) فنسبة مربع بز الرابع الى مربع بجـ الثالث كنسبة بجـ الثالث الى از الاول فيكون مكعب بجـ الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع بز وارتفاعه از لكن هذا المجسم الذى قاعدته مربع بز وارتفاعه از مساو لمكعب بز والمجسم الذى قاعدته مربع بز وارتفاعه اب وهذا (5) المجسم الذى قاعدته مربع بز (6) وارتفاعه اب هو مثل عدة الاموال المفروضة فمكعب بز مع عدة امواله المفروضة مساو للعدد المفروض وذلك ما اردنا ان نبين وهذا الصنف ليس فيه اختلاف وقوع (7) ولا يستحيل شىء من مسائله وقد خرج بخواص القطوع المكافى والزائد (8) معا

الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية مكعب وعدد يعدل مالا نفرض (*) اجـ لعدة الاموال ونعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض ويكون ضلعه حـ فخط حـ لا يخلو اما ان يكون مساويا لخط اجـ او اعظم منه او اصغر فان كان مساويا له استحالت المسئلة لانه لا يخلو اما ان يكون ضلع المكعب المطلوب مثل حـ او اصغر او اكبر فان كان مثله كان ضرب اجـ فى مربعه مثل مكعب حـ فيكون العدد مثل عدة الاموال ولا يحتاج الى

---

(١) Ce passage à partir de الذى manque dans C. — (٢) مساويا C. — (3) اط C. — (4) فالخطوط etc. manque dans C. — (5) وهذا manque dans C. — (6) مربع بز manque dans C. — (7) وقع C. — (8) القطع المكافى والزوايد C.

(*) Voyez Fig. 21, 1. 2. 3.

قاعدته مربع آب وارتفاعه (١) بجـ الذى عملناه مساويا للعدد المفروض والمجسم الذى يحيط به قاعدة (٢) مساوية لمربع آب وارتفاع بحـ الذى هو مثل عدة الاضلاع المفروضة لمكعب بحـ فمكعب بحـ مثل العدد المفروض ومثل (3) عدة اضلاعه المفروضة وذلك المراد فقد تبين انه ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا فيه شىء يستحيل اعنى فى (4) مسائله وقد خرج بخواص قطعين مكافى (5) وزائد معا

الصنف الرابع من الاصناف الستة الثلاثية مكعب واموال تعدل عددا (6) نضع (*) خط آب لعدة الاموال ونعمل مكعبا مساويا للعدد (7) المفروض وليكن ضلعه حـ ونخرج آب على استقامة ونجعل بطـ مثل حـ ونتم (8) مربع بطدجـ ونعمل على (9) نقطة دـ قطعا زائدا لا يلقاه بجـ بطـ وهو قطع هدنـ كما تبين من قوة شكلى دـ وهـ (10) من مقالة بـ وشكل نطـ من مقالة آ فيكون قطع هدنـ معلوم الوضع لان نقطة دـ معلومة الوضع وخطا بجـ بطـ معلوما الوضع ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة آ وسهمه اطـ وضلعه القائم بجـ (11) وهو قطع اكـ فيكون قطع اكـ (12) معلوم الوضع والقطعان يتقاطعان باضطرار (13) فليتقاطعا (14) على نقطة هـ فيكون هـ معلومة الوضع ونخرج منها عمودى هزـ هلـ على خطى اطـ بجـ فيكونان معلومى الوضع والقدر واقول انه لا يمكن ان يقطع قطع اهكـ قطع هدنـ على نقطة يكون العمود النازل منها الى خط اطـ هو واقعا على طـ او خارجا منها فليقع (15) على طـ ان امكن فيكون مربعه مساويا لضرب اطـ فى طبـ الذى هو مثل بجـ لكن ذلك العمود يكون مساويا لعمود دطـ فيكون مربع طدـ مساويا

---

(١) Ce passage à partir de لان جحـ manque dans C. — (٢) قاعدته A. — (3) مثل sans و C. — (4) Le Ms. C. porte شى مستحيل من . — (5) مكافى manque dans C. — (6) اعدادا C. — (7) لعدد C. — (8) نتم A. C. — (9) عليه manque dans A. — (10) دـ دهـ C. — (11) دهـ A. C. — (12) الفـكـ C. — (13) باضطرار manque dans A. — (14) فليتاقاطعا C. — (15) فلنقطع A.

(*) Voyez Fig. 20.

مع العدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع آب وارتفاعه (١) بط وهو عدة اضلاع المكعب وقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف وقوع ويقع من مسائله (٢) ما يستحيل وقد خرج بخواص قطعين مكاف وزائد (3)

الصنف الثالث مكعب يعدل اضلاعا وعددا نضع (*) آب ضلع مربع مثل عدة الاضلاع (4) ونعمل مجسما قاعدته (5) مربع آب ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه بجـ عمودا على آب ونخرج آب بجـ على استقامة ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه على استقامة آب وضلعه القائم آب وهو دبه ويكون معلوم الوضع ويكون مماسا لخط بجـ على ما (6) بينه ابلونيوس فى شكل لجـ من مقالة آ ونعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة (7) ب وسهمه على استقامة بجـ وكل واحد من ضلعيه (8) القائم والمائل مثل بجـ وهو قطع زبه ويكون (9) معلوم الوضع ومماسا لخط آب فالقطعان لا محالة يتقاطعان فليتقاطعا (10) على نقطة ه فتكون معلومة الوضع ونخرج من نقطة ه عمودى هط هح فهما معلوما الوضع والقدر وخط هح من خطوط الترتيب فعلى ما تقدم يكون مربعه مساويا لضرب جح فى بح فنسبة جح الى هح كنسبة هح الى حب لكن نسبة هح الذى (11) هو مثل بط الى حب الذى هو مثل هط وهو من خطوط الترتيب فى القطع الآخر كنسبة هط الى آب الذى هو الضلع القائم للقطع فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة آب الى حب كنسبة حب الى بط وكنسبة بط الى جح فنسبة مربع آب الاول الى مربع حب الثانى كنسبة حب الثانى الى جح الرابع فيكون مكعب حب مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع آب وارتفاعه جح لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما لكن هذا المجسم مساو للمجسم الذى

---

(1) ارتفاعه sans و C. — (2) مسايلها C. — (3) وزوايد C. — (4) اضلاع C. — (5) قاعدة C. — (6) كما C. — (7) نقطة manque dans C. — (8) ضلعه A. — (9) فيكون A. — (10) فالیتقاطعان C. — (11) الى A.

(*) Voyez Fig. 19.

اضلاعا فنفرض (*) اب ضلع مربع مساو لعدة الجذور ونعمل مجسما يكون قاعدته مربع اب ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن (١) ارتفاعه بج وهو عمود على اب ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه على استقامة اب وضلعة القائم اب وهو دبة ويكون معلوم الوضع ونعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة ج وسهمه على استقامة بج وكل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل بج (٢) وهو هجز ويكون (3) معلوم الوضع كما بينه ابلونيوس فى شكل نح من مقالة آ فهذان القطعان اما ان يتلاقيا واما ان لا يتلاقيا فان لم يتلاقيا فالمسئلة مستحيلة وان (4) تلاقيا بالتماس على نقطة او بالتقاطع (5) على نقطتين فيكون النقطة معلومة الوضع فليتلاقيا على نقطة ه ونخرج (6) منها عمودى هط هح على خطى بط بح فيكون العمودان لا محالة معلومى الوضع والقدر وخط هط من خطوط الترتيب فيكون نسبة مربع هط الى ضرب بط فى طج كنسبة الضلع القائم الى الضلع المائل كما بينه ابلونيوس فى شكل كح من مقالة آ والضلعان القائم وهو (7) المنتصب والمائل متساويان فمربع هط مساو لضرب بط فى طج فنسبة بط الى طه كنسبة طه الى طج ولكن مربع هح الذى هو مثل بط مساو لضرب بح فى با كما تبين فى شكل يب من مقالة آ من كتاب المخروطات فنسبة اب الى بط كنسبة بط الى بح وكنسبة بح الذى هو مثل هط الى طج فالخطوط الاربعة متناسبة فنسبة مربع اب الاول (8) الى مربع بط الثانى كنسبة بط الثانى الى طج الرابع فمكعب بط مساو للمجسم الذى قاعدته مربع اب وارتفاعه جط ونجعل المجسم الذى قاعدته مربع اب وارتفاعه بج الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون مكعب بط

---

(١) ولكن C. — (٢) Ces mots à partir de وكل manquent dans C. — (3) يخرج C. — (4) واما ان C. — (5) وبالقطع C. — (6) فيكون C. — (7) القائم وهو manque dans C. — (8) الاولى A.

(*) Voyez Fig. 18.

ما معنى العدد المجسم فى كلامنا وهو مجسم يكون قاعدته مربع الواحد وارتفاعه مثل العدد المفروض اعنى خطا نسبته الى ضلع قاعدة المجسم كنسبة العدد المفروض (١) الى الواحد ونخرج آب على استقامة الى ز ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه بز وضلعه القائم آب وهو قطع حبد فيكون قطع حبد معلوم الوضع كما بينا آنفا ويكون مماسا لخط بجـ ونعمل على بجـ نصف دائرة فانها باضطرار يقطع القطع فليقطعه على د ونخرج من د التى هى معلومة الوضع كما عرفته عمودى دز دة على بز بجـ فيكونان معلومى الوضع والقدر فخط دز من خطوط الترتيب فى القطع فيكون مربعه مساويا لضرب بز فى آب فيكون نسبة آب الى دز الذى هو مثل بهـ كنسبة بهـ الى هدـ الذى هو مثل زب لكن نسبة بهـ الى هدـ كنسبة هدـ الى هجـ فالخطوط (٢) الاربعة متناسبة آب بهـ هدـ هجـ فنسبة مربع آب الاول (3) الى مربع بهـ الثانى كنسبة بهـ الثانى الى هجـ الرابع فالمجسم الذى قاعدته مربع آب وارتفاعه هجـ مساو لمكعب بهـ لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما ونجعل المجسم الذى قاعدته مربع آب وارتفاعه هب مشتركا فيكون مكعب بهـ مع هذا المجسم مثل المجسم (4) الذى قاعدته مربع آب وارتفاعه بجـ الذى فرضناه مساويا للعدد المفروض لكن المجسم الذى قاعدته مربع آب الذى هو مثل عدة الجذور وارتفاعه هب الذى هو ضلع المكعب مساو لعدة اضلاع مكعب هب المفروضة فمكعب هب مع عدة اضلاعه المفروضة (5) مساو للعدد المفروض وذلك المراد وليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا يستحيل من مسايله شىء وقد خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع المكافى

الصنف الثانى من الاصناف الستة الثلاثية هو (6) مكعب وعدد يعدل

---

(١) المفروط C. Les mots à partir de اعنى jusqu'à المفروض manquent dans B. — (٢) بالخطوط A. — (3) الاولى A. B. — (4) مثل المجسم manque dans C. — (5) Ici finit le Ms. B. — (6) وهو C.

آب الى كـ فيكون نسبة مربع آج الى مربع حز كنسبة هط الى بد فقاعدتا المجسمين مكافيتان (1) لارتفاعيهما فهما متساويان وذلك ما اردنا ان نبين

ومن بعد ذلك فانا نأتي (2) بالصنف الثالث من المفردات وهو كعب يعدل عددا (3) نضع (*) العدد مجسم (4) ابجد وقاعدته آج وهو مربع الواحد كما قلنا وطوله مثل العدد المفروض ونريد ان نعمل مكعبا مساويا له فنأخذ بين خطى آب بد (5) خطين وسطين فى النسبة فيكونان معلومى القدر كما بيناه (6) وهما هز ونجعل حط مساويا لخط هز ونعمل عليه مكعب طحكل فيكون هذا المكعب معلوم القدر وضلعه معلوم القدر فاقول انه مساو لمجسم د برهانه نسبة مربع آج الى مربع طك كنسبة آب الى حك مثناة ونسبة آب الى حك مثناة كنسبة آب الى ز الاول الى الثالث من الخطوط الاربعة بل كنسبة (7) حك الثانى الى بد الرابع فقاعدتا مكعب ل ومجسم د مكافيتان (8) لارتفاعيهما فهما (9) متساويان و ذلك ما اردنا ان نبين (10)

ومن بعد ذلك فانا نشتغل بالاصناف الستة الباقية الثلاثية (11) الصنف الاول هو (12) مكعب واضلاع (13) تعدل عددا (14) نضع (**) آب ضلع مربع (15) مساو لعدة الجذور وهو مفروض ونعمل مجسما يكون قاعدته مثل مربع آب ويكون ارتفاعه مثل بج ويكون مساويا للعدد المفروض كما بينا عمله فيما تقدم ونجعل بج عمودا على آب وقد علمت

---

(1) متكافيتان B. C. — (2) فانى ياتى C. — (3) عدد C. — (4) مجسّما C. — (5) بج A. B. C. — (6) بيّنا C. — (7) A. et B. ajoutent ici الاول. — (8) متكافيان C. — (9) فهما مكافيان. Le Ms. B, qui est très-râpé en cet endroit, semble porter فهما manque dans B. — (10) بيانه C. — (11) Ce passage à partir de ومن manque dans B. — (12) وهو C. — (13) واضلاعه C. — (14) اعدادا B. C. — (15) المربع B.

(*) Voyez Fig. 16. — (**) Voyez Fig. 17.

مربع (*) ابجد (١) مفروض وهو قاعدة مجسم ابجده المتوازى السطوح القائم (٢) الزوايا ومربع مح مفروض ونريد ان نعمل على قاعدة مح مجسما متوازى السطوح قائم الزوايا مساويا لمجسم ابجده المفروض فنجعل نسبة اب الى مز كنسبة مز الى كك ثم نجعل نسبة اب الى كك كنسبة زط الى هد ونجعل زط عمودا على سطح مح على نقطة ز ونتمم (3) مجسم مزطح فاقول ان هذا المجسم مساو للمجسم المفروض برهانه نسبة مربع اج الى مربع مح كنسبة اب الى كك فيكون نسبة مربع اج الى مربع مح كنسبة زط الذى هو ارتفاع مجسم (4) مطح الى هد الذى هو ارتفاع مجسم به فيكون المجسمان متساويين لان قواعدهما مكافئة (5) لارتفاعيهما كما تبين فى مقالة يا من الاصول وكلما قلنا مجسم فانا نعنى به المجسم المتوازى السطوح القائم الزوايا وكذلك كلما (6) قلنا سطح فانا نعنى به السطح المتوازى الاضلاع القائم الزوايا

مجسم (**) ابجد مفروض (7) وقاعدته اج مربعة ونريد ان نعمل مجسما قاعدته مربع (8) وارتفاعه مثل هط المفروض ويكون مساويا لمجسم اجد فنجعل نسبة هط الى بد كنسبة اب الى كك ونأخذ بين اب وكك خطا وسطا (9) فى النسبة وهو هز ونجعل هز عمودا على هط ونتمم طز (10) ونجعل هح (11) عمودا على سطح طز (12) ويكون مثل هز ونتمم (13) مجسم حهطز فاقول ان مجسم ط الذى قاعدته مربع حز وارتفاعه هط المفروض مثل مجسم د المفروض برهانه ان نسبة مربع اج الى مربع حز كنسبة

---

(1) Pour les lettres désignant les sommets des figures le Ms. C. dans cette proposition offre beaucoup de confusion. — (2) القاية A. B. C. — (3) نتم B. C. — (4) مجسم sans C. — (5) متكافية C. — (6) كما C. — (7) مفروض — (8) مربعه C. — (9) موسطا C. — (10) Au lieu de طز ونتمم manque dans C. — (11) هر B. — (12) طب A. هط sans B. سطح le Ms. B. porte هر — ونكون مثل — (13) ونتم B. C.

(*) Voyez Fig. 15, 1. — (**) Voyez Fig. 15, 2.

الخطان المستقيمان اب بج ونجعلهما محيطين (1) بزاوية ب القائمة (2) ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه بج وضلعه القائم بج وهو قطع بده فيكون قطع بده معلوم الوضع لان رأسه وسهمه معلوما الوضع (3) وضلعه القائم معلوم القدر ويكون مماسا لخط با لان زاوية ب قائمة وهى مساوية لزاوية الترتيب كما تبين فى شكل (4) لج (5) من مقالة آ من المخروطات وكذلك نعمل قطعا آخر مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه اب وضلعه القائم اب (6) وهو (7) قطع بدز (8) كما بينه ابلونيوس فى شكل نو من مقالة آ (9) يكون قطع بدز مماسا لخط بج فهما يتقاطعان (10) باضطرار فليتقاطعا (11) على نقطة د فنقطة د معلومة الوضع لان القطعين معلوما الوضع ونخرج منها عمودى دح دط على اب بج فيكونان معلومى القدر كما بين (12) فى المعطيات فاقول ان خطوط (13) اب بح بط بج الاربعة متناسبة برهانه ان مربع حد مساو لضرب بح فى بج لان خط دح من خطوط الترتيب فى قطع بده فيكون نسبة بج الى حد المساوى لخط بط كنسبة بط الى حب وخط دط من خطوط الترتيب فى قطع بدز يكون مربع دط الذى هو مثل بح مساويا (14) لضرب با فى بط فنسبة بط (15) الى بح كنسبة بح الى با فالخطوط (16) الاربعة متناسبة متوالية وخط دح (17) معلوم القدر لانه خرج من نقطة معلومة الوضع الى خط معلوم الوضع على زاوية معلومة القدر وكذلك دط معلوم القدر فخطا بح بط معلوما القدر وهما وسطان (18) فى النسبة بين خطى اب بج اعنى نسبة اب الى بح كنسبة بح الى بط وكنسبة بط الى بج وذلك ما اردنا ان نبين

---

(1) مختطين C. — (2) القايم C. — (3) Ces mots à partir de لان manquent dans B.—(4) الشكل C.—(5) بح A. نح B.—(6) اب manque dans B.—(7) وهى C.— (8) Le Ms. C. ajoute مماسا لخط ب ح.— (9) و C. — (10) مقاطعان B.— (11) فلتقاطعا B. — (12) تبين C. — (13) خط C. — (14) مساو A. — (15) فنسبة بط manque dans B. —(16) الخطوط C.— (17) حح A.— (18) متوسطان sans وهما C.

الاموال وهو واحد وستهم (1) مجسم ازطجح (2) فيكون مجسم ازطجح (3) مثل عدة الاموال المفروضة فيبقى مجسم زة مساويا لعدة الاضلاع المفروضة (4) ونسبة المجسمين احدهما (5) الى الآخر كنسبة قاعدة زج الى قاعدة (6) زل كما تبين فى الحادية عشرة (7) من الاصول اذ الارتفاعان متساويان ولكن سطح زج (8) هو (9) جذر واحد (10) لمربع جب وسطح زل (11) هو عدد (12) الاجذار وهو ثلاثة فمربع (13) جب مثل جذر واحد وثلاثة اعداد وذلك ما اردنا ان نبين (14) وهذه البراهين ما لم تفهم على هذا (15) النمط لا يكون الصناعة حكمية (16) وان كان فيه تجشم (17) مصاعب

ومن بعد تقديم هذه الاصناف التى امكن البرهان (18) عليها من خواص الدايرة اعنى من كتاب اقليدس فلنقل الآن (19) على الاصناف التى لا يمكن البرهان (18) عليها الا بخواص القطوع وهى (20) اربعة عشر صنفا واحد مفرد (21) وهو عدد يعدل مكعبا وستة ثلاثية باقية وسبعة رباعية ولنقدم مقدمات مبنية على كتاب المخروطات ليكون شبه تمهيد للمتعلم ولا تكون رسالتنا هذه مفتقرة الى اكثر من الثلاثة الكتب المذكورة اعنى كتابى (22) اقليدس (23) فى الاصول وفى المعطيات ومقالتين من كتاب المخروطات

نريد ان نجد خطين بين خطين ليتوالى الاربعة متناسبة فليكن (*)

---

(1) نتم B. يتم C. — (2) ازطحد A. B. C. — (3) ازطحه A. B. — (4) Ce passage à partir de زج الى قاعدة (6) فيبقى manque dans C. — (5) احداهما C. — (6) ب ح A. بح B. — (7) manque dans C. — (8) الحادية عشر A. يا B. C. — (9) بين C. — (10) بواحد C. — (11) بل A. — (12) عدة A. — (13) المربع C. — (14) ان C. — (15) نبين manque dans C. — (16) يفهم على هذه C. — (17) تجسّمُ A. لجسم B. تجشم C. — (18) البراهين C. — (19) الآن manque dans A. et B. — (20) وهو A. — (21) واحد مفرد manque dans A. — (22) كتاب C. — (23) Ici et ci-dessus, lig. 11, le Ms. A. porte اوقليدس.

(*) Voyez Fig. 14.

فقاعدتاهما يكونان اذن متساويتين (١) وقاعدة حب هو مربع جب مع حا الذى هو عدة اجذاره التى فرضت للاموال فيكون ك الذى هو العدد المفروض للاجذار مثل مال وعدة الاجذار المفروضة للاموال وذلك ما اردنا ان نبين ومثاله (٢) مكعب وثلاثة اموال يعدل (3) عشرة اجذار يكون مال وثلاثة اجذار يعدل (4) عشرة اعداد

والصنف الثانى منها (5) مكعب مع جذرين يعدل ثلاثة اموال يكون مالا مع اثنين يعدل ثلاثة اجذار برهانه (*) نضع مكعب ابجده وهو مع جذريه يعدل ثلاثة اموال ونضع ح مربعا مثل جب ونضع ك ثلاثة فيكون ضرب ح فى ك ثلاثة اموال مكعب اه ونعمل على اج سطحا مساويا لاثنين (6) ونتمم (7) مجسم ازجطد فيكون مثل عدة الجذور ولكن خط زب (8) اذا ضرب فى مربع اج حصل مجسم بط ومجسم اط (9) مثل عدة الاضلاع فمجسم بط مثل المكعب مع (10) مثل عدة اضلاعه فيكون مجسم بط مساويا لعدة الاموال فيكون خط زب على ما تبين فى الشكل المتقدم (11) ثلاثة وسطح بل (12) هو مال واثنان فمال واثنان يعدل ثلاثة اجذار لان سطح بل (13) هو من ضرب اب فى ثلاثة وذلك ما اردنا ان نبين (14)

والصنف الثالث منها هو(15) مكعب يعدل مالا وثلاثة اجذار(16) فيكون مال (17) يعدل جذرا (18) وثلاثة اعداد نضع (**) مكعب ابجده الذى يعدل ماله وثلاثة اضلاعه ونفصل من خط اب الذى هو ضلعه خط از مثل عدة

---

(١) متساويان sans اذا يكونان C. — (٢) ان نبين و manque dans A. Le Ms. B. porte متسيس et puis au lieu de ومثاله les mots منها (5) — C. وتعدل (4) — C. تعدل (3) — . والصنف الثانى منها manque dans C. — (6) للاسس A. — (7) نتم B. C. — (8) دا C. — (9) اه C. — (١٠) مع manque dans C. — (١١) المقدم C. — (١٢) ال A. B. و آ C. — (١٣) اجذاره B. — (١٤) يتبيّن B. — (١٥) هو manque dans C. — (١٦) دل A. B. د C. — (١٧) مالان اجذار C. — A. مالا (١٨) جذران C.

(*) Voyez Fig. 12. — (**) Voyez Fig. 13.

مساويا لمربع ح مع مربع هكَ الذى (١) هو نصف عدة الاضلاع وليكن مربع زَ (٢) ونجعل (3) كج مساويا لضلع زَ ونتمم (4) مربع ابجدَ فيكون مربع ابجدَ هو (5) المطلوب وتبين ان (6) فى هذا الصنف الثالث ليس شىء يستحيل (7) وكذا (8) فى الاول واما فى الثانى ففيه ما يستحيل وله اختلاف وقوعات وليس لهذين

واما البرهان على ان الثلاثة الثانية من هذه الاصناف مناسبة للثلاثة الاولى فالصنف الاول منها (9) مكعب واموال تعدل جذراً (10) فنضع (11) (*) مكعب ابجدهَ ونخرج (12) آبَ على استقامة الى زَ ونجعل آزَ (13) مثل عدة (14) الاموال ونتمم (15) مجسم ازحطجدَ على استقامة مكعب آهَ على ما جرت به العادة فمجسم آطَ مثل عدة الاموال فيكون مجسم بطَ الذى هو المكعب وعدة الاموال المفرضة كعدة الاجذار المفروضة ونعمل سطح (16) كَ كعدة (17) الاجذار المفروضة والجذر هو ضلع المكعب (18) وهو ادَ فسطح (19) كَ اذا (20) ضرب فى ادَ يكون مثل عدة الاضلاع المفروضة وسطح حبَ اذا ضرب فى ادَ يكون منه المكعب مع عدة امواله المفروضة (21) وهما متساويان اعنى مجسم بطَ والمجسم المعمول على كَ الذى ارتفاعه ادَ فقاعدتاهما يكونان مكافئتين لارتفاعيهما وارتفاعاهما (22) متساويان

---

(1) Au lieu de مع مربع هكَ الذى le Ms. C. porte كالذى. — (2) Ce passage à partir de هكَ الذى manque dans B. — (3) حعل B. يجعل C. — (4) وكذا B. — (5) وهو C. — (6) أن manque dans C. — (7) مستحيل B. — (8) يتمم C. — (9) منه A. Le Ms. C. porte منه manque dans A. et B. — بالصنف الاول. — (10) عددا A. B. — (11) يضع C. — (12) يخرج C. — (13) Ces mots à partir de على manquent dans B. — (14) عدد A. — (15) يتم B. — (16) سطح manque dans C. — (17) لعدة B. C. — (18) الكعب A. — (19) Ces mots à partir de والجذر sont remplacés dans B. par وتعمل سطح. — (20) اذ B. — (21) Tout ce passage à partir de حبَ وسطح manque dans B. — (22) متكافيين لارتفاعيهما وارتفاعهما C.

(*) Voyez Fig. 11.

يكون مربعه مع سطح ه مساويا لضرب آب فى ذلك الخط فنضيف الى خط آب المعلوم سطحا مساويا لسطح ه المعلوم ننقص (١) عن تمامه سطحا مربعا وهو ممكن لان سطح ه (٢) ليس باعظم من مربع نصف آب وليكن (3) سطح آز والمربع الناقص سطح جد كما بينه اقليدس فى سادسة الاسطقسات (4) فيكون ضلع جب معلوما كما تبين (5) فى المعطيات وذلك ما اردنا ان نبيّن فقد لاح ان لهذا الصنف انواعا ويقع فيها ما يستحيل ويمكنك ان تعلم (6) شرائط صحته فى العدد على ما بيناه فى الصنف الاول

والصنف الثالث عدد وجذر (7) يعدل مالا يزاد مربع نصف الاجذار على العدد ويؤخذ جذر المبلغ ويزاد على نصف الاجذار فما (8) يحصل (9) هو جذر المال برهانه (*) مربع ابجح يعدل خمسة اجذاره وستة من العدد فنفصل العدد منه وهو (10) سطح اد يبقى سطح هج عدة (11) الاجدار وهو خمسة فيكون خط هب خمسة نقسمه (12) بنصفين على ز فخط هب قسم بنصفين على ز وزيد (13) فيه ها على استقامته (14) يكون سطح با فى اه الذى هو سطح اد المعلوم (15) مع مربع هز المعلوم مثل مربع زا فمربع زا معلوم وزا معلوم (16) وزب معلوم فيكون اب معلوما وله وجوه أخرى من البراهين فارتض (17) بها واما (**) ان فرض به الذى هو عدة الاجذار وطلب المربع وضلعه كى يكون مساويا لعدة اضلاعه مع العدد (18) المفروض فليكن العدد المفروض سطح ط (19) والمربع المساوى له ح ونعمل (20) مربعا

---

(١) ينقص C. — (٢) ه manque dans C. — (3) ولكن B. — (4) كما بينه C. — (5) بين C. — (6) تعلم ان B. بعظم C. — (7) حذور A. — (8) فما manque dans C. — (9) حصل A. — (10) ومنه B. — (11) لهذه A. B. — (12) يقسمه A. نقسم C. — (13) ونزيد C. — (14) استقامه C. — (15) المعلوم manque dans A. — (16) وزا معلوم manque dans C. — (17) فارفض C. — (18) عدد C. — (19) ط manque dans C. — (20) يعمل C.

(*) Voyez Fig. 9. — (**) Voyez Fig. 10.

آد وضلعه آج يكون معلوما على ما تبين (١) فى المعطيات

والصنف الثانى منها مال وعدد يعدل جذراً هذا يجب (٢) ان يكون العدد فيه ليس باعظم من مربع نصف الاجذار والا فالمسئلة مستحيلة فان كان مثل مربع نصف الاجذار فنصف الاجذار هو (3) جذر المال وان (4) كان اقل منه (5) نقص العدد من مربع نصف الاجذار وما بقى يؤخذ جذره ويزاد على نصف الاجذار او (6) ينقص منه فما بلغ من الزيادة وما بقى من النقصان كان جذر المال وبرهانه بالعدد يتصور عند تصور برهانه (7) الهندسى (*) نضع مربع ابجد ونضع هد العدد (8) على سمت آد فيكون سطح هج مثلا يعدل عشرة اضلاع مربع آج فيكون هب عشرة وفى الاول يكون اب نصف هب وفى الثانى اعظم من نصفه وفى الثالث اصغر من نصفه ففى (9) الاول يكون اب خمسة وفى الثانى نقسم هب على ز وكذلك فى الثالث فخط هب قسم بنصفين على ز وبقسمين غير متساويين على آ فيكون سطح ها فى اب مع مربع زا مساويا لمربع زب كما تبين (10) فى ثانية الاسطقسات (11) وسطح ها فى اب هو العدد وهو معلوم واذا نقص من مربع زب الذى هو نصف الاجذار يبقى مربع زا معلوما وينقص (12) فى الثالث من زب وفى الثانى يزاد عليه يبلغ (13) او يبقى اب وذلك المراد وان شيت امكنك البرهان عليه من وجوه أخرى ولكنا اقتصرنا على هذا مخافة التطويل واما (**) ان فرض خط اب عشرة مثلا واريد ان يفصل منه خط (14) يكون ضرب اب فى ذلك الخط مساويا لمربع ذلك الخط مع سطح آخر غير اعظم من مربع نصف اب اعنى (15) العدد المفروض وهو سطح ه ونريد ان نفصل من اب خطا

---

(١) بس A. — (٢) بحسب C. — (3) الذى هو C. — (4) فان C. — (5) منه C. — (6) و A. — (7) برهان C. — (8) للعدد A. — (9) وفى C. — (10) بيّن B. — (11) الاستقطسات C. — (12) Ces mots à partir de الاجذار manquent dans B. — (13) يبلغ manque dans C. — (14) نفصل منه خطا C. — (15) وعنى C.

(*) Voyez Fig. 7. — (**) Voyez Fig. 8.

ونـنصفه (1) على زَ فلان خط دَهَ قسم بنـصـفـيـن على زَ وزيـد فـيـه على استقامته (2) اَد فيكون ضرب هَا فى اَد الذى هو مـثـل سطـح هَب مـع مربع دَز مساويا (3) لمربع زَا ومربع دَز الذى هو نـصـف الاجـذار مـعـلـوم وسطح بَهَ الذى هو العدد المفروض معلوم فيكون مربع (4) زَا معلوما وخط زَا معلوما (5) واذا نـقص منه زَد يـبقى (6) اَد معلوما ولذلـك (7) برهان آخر (*) نضع (8) ابجد مربعا ونخرج بَا الى هَ ونجعل هَا ربع الاجـذار وهـو اثـنـان ونصف ونخرج دَا الى زَ ونجعل زَا مثل ربع الاجذار وكـذلـك نخـرج من جميع زوايا المربع خطوطا على هذه الصفـة ونـتمم (9) سطح حَط فـيـكـون مربعا لان زَهَ مربع واَج مربع وجَط (10) مربع على مـا تبـيـن فى سـادسـة الاصول (11) والمربعات الاربعة (12) التى فى زوايا المـربـع الكـبـيـر كل واحـد (13) مـنـهـا مربع الاثـنين والنصف فيكون جميعا خمسة وعشريـن الذى هو مربع نصف الاجذار وسطح زَب جذرين (14) ونصف من اجذار مربع اَج لان زَا اثـنان ونصف فـيـكـون الـسـطـوح الاربـعـة عـشـرة (15) اجذار مربع اَج وقد فرض مربع اَج مع عشرة اجذاره تسعة وثـلاثيـن مـن العدد فيكون مربع حَط اربعة وستين يؤخذ جذره وينـقص منه خمسة يـبقى اَب واما ان فرض (**) خط اَب عشرة واريد (16) مـربـع يـكـون مـع ضـرب ضلعه فى اَب مساويا للعدد المفروض فـنضع الـعـدد المـفـروض (17) سـطـح هَ وهو متوازى الاضلاع قايم الزوايـا على ما قدمناه (18) ونضيف الى خـط اَب سطحا متوازى الاضلاع مساويا لسطح هَ ونزيد على تمامه سطحـا مـربـعـا كما بـينه اقليدس فى سادسة الاصول وليكن (19) سطح بَد والمـربـع الـزائـد

---

(1) ينصفه C. — (2) استقامه A. — (3) مساو A. — (4) مربع manque dans C. — (5) معلوم C. — (6) بقى C. — (7) وكذلك C. — (8) يضع C. — (9) نتم B. — (10) فيكون حـ ط C. — (11) على ما بس فى ٦ الاصول A. على ما بس فى C. — (12) الاربع B. — (13) واحدة B. — السادس B. كما بين فى السادسه C. — (14) جذران C. — (15) عشر A. — (16) اريد A. ازيد C. — (17) Les mots فنضع العدد المفروض manquent dans B. — (18) قدمنا B. — (19) ولكن B.

(*) Voyez Fig. 5. — (**) Voyez Fig. 6.

ضلعه الذى هو آب اذا ضرب فى اربعة يحصل (1) مكعب ابجده لا ان ضلعه اذا ضرب فى مربعه اعنى مربع آج حصل المكعب فيكون مربع آج اربعة

والصنف السادس اموال تعدل كعبا يكون فى قوة عددٍ يعدل (2) جذرا برهانه بالعدد ان نسبة العدد الى الجذر كنسبة المال الى الكعب كما بين فى ثامنة (3) لاصول واما بالهندسة (*) فانا (4) نضع مكعب ابجده عديل عدة امواله مثلا عديل مالين ومربع ضلعه آج فسطح آج اذا ضرب فى اثنين حصل مكعب ابجده الا انه اذا ضرب فى بد الذى هو ضلعه حصل مكعب ابجده فيكون بد الذى هو ضلعه مثل اثنين وذلك المراد وكلما قلنا فى هذه الرسالة اموال المكعب فانا نعنى بها مربعات اضلاعه

فاذ (5) قد أتينا على المفردات فلنقل (6) على الثلاثة الاولى من الاصناف الاثنى عشر الثلاثية والصنف (7) الاول منها (8) مال وعشرة اجذار (9) يعدل تسعة وثلاثين عددا (10) فاضرب نصف الاجذار (11) فى مثله وزد الحاصل على العدد وانقص من جذر المبلغ نصف الاجذار فالباقى هو جذر المال اما العدد فيحتاج الى هذين الشرطين واحدهما (12) ان يكون عدة الاجذار عددا زوجا ليكون له نصف والثانى ان يكون مربع نصف الاجذار والعدد مجموعين عددا مربعا والا فالمسئلة مستحيلة من حيث العدد واما بالهندسة (13) فلا يستحيل شىء من مسائلها اصلا والبرهان عليه من جهة العدد سهل عند تصوّر برهانه الهندسى وبرهانه الهندسى (14) هكذا (**) نضع مربع آج مع عشرة اجذاره عديل تسعة وثلاثين من العدد وعشرة اجذاره هو سطح جه فيكون خط ده عشرة

---

(1) فحصل A. — (2) بعدل A. B. بعدل C. — (3) ٨ A. ثامن C. — (4) فانا manque dans A. et B. — (5) فاذا B. C. — (6) فلنقل A. فليقل C. — (7) فالصنف manque dans C. — (8) منها A. — (9) احداره B. — (10) عددا manque dans A et B. — (11) الاجذار manque dans B. — (12) احدهما B. — (13) اما الهندسة manquent dans C. — (14) Les mots وبرهانه الهندسى et sans و C.

(*) Voyez Fig. 3. — (**) Voyez Fig. 4.

والصنف الثالث عدد يعدل مكعبا فاذا كان الموضوع عددا فيكون المكعب معلوما ولا سبيل الى استخراج ضلعه الا بالاستقراء وكذلك فى جميع المراتب العددية من مال المال ومال الكعب وكعب الكعب كما ذكرناه آنفا واما بالهندسة (*) فانا نضع مربع آد مربع الواحد اعنى ان يكون آب مثل بد وكل واحد منهما يفرض واحدا (١) ثم نقيم على سطح آد على نقطة ب منه عمود بج ونجعله (٢) مساويا للعدد المفروض كما بينه اقليدس فى القول الحادى عشر من كتابه ونتمم (3) مجسم ابجدهزح فمعلوم ان مساحة هذا المجسم يكون مساوية (4) للعدد (5) المفروض فنعمل مكعبا مساويا لهذا المجسم وعمله لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية (6) فأخرناه الى ان نأتى بمقدمات (7) لها وكلما قلنا عدد يساوى مجسما فانا نعنى بالعدد (8) هناك مجسما متوازى الاضلاع قائم الزوايا يكون قاعدته مربع الواحد وارتفاعه مساويا (9) للعدد المفروض

والصنف الرابع مال يعدل خمسة اجذاره (١٠) فيكون عدة الاجذار هو جذر المال وبرهانه بالعدد هو ان الجذر اذا ضرب فى مثله حصل المال وهذا جذر اذا ضرب فى خمسة حصل المال فهو خمسة وبرهانه بالهندسة شبيه هذا اذا وضعت سطحا مربعا عديلا لخمسة اضلاعه

والصنف الخامس اشياء تعدل كعبا فبالعدد بين (١١) انه يكون مثل عدد يعدل (١٢) مالا مثاله اربعة اجذار يعدل (١٢) كعبا يكون كانه قال اربعة اعداد يعدل مالا لمكان التناسب المذكور(١٣) واما بالهندسة (**) نضع مكعب ابجده ومساحته (١٤) عديلة لمساحة اربعة اضلاعه وضلعه آب فيكون

---

(١) بفرض واحد A. B. — (٢) وجعله C. — (3) وتتم B. — (4) مساويا C. — (5) بالعدد A. — (6) المخروطية manque dans B. et C. — (7) ياتي مقدمات C. — (٨) العدد C. — (٩) مساو A. — (١٠) احذار A. — (١١) فيا لعدد من C. — (١٢) بعدل A. B. — (١٣) المناسبه المذكوره C. — (١٤) ومساحيه A. — ومساحه B.

(*) Voyez Fig. 2. — (**) Voyez Fig. 3.

فان من يعلم ان جذر خمسة وعشرين هو خمسة فانما يعلمه بالاستقرآء (١) لا بالقانون الصناعى فلا نلتفت (٢) فيه الى قول المتخلفين (3) من اهل هذه الصناعة وللهند (4) طرق فى استخراج اضلاع المربعات والمكعبات مبنية على استقرآء قليل وهو معرفة مربعات الصور التسعة اعنى مربع الواحد والاثنين والثلاثة وكذلك مضروب بعضها فى بعض (5) اعنى مضروب الاثنين فى الثلاثة ونحوها (6) ولنا كتاب فى البرهان على صحة تلك الطرق وتأديتها (7) الى المطلوبات (8) وقد غزرنا (9) انواعها اعنى من استخراج اضلاع مال المال ومال الكعب وكعب الكعب بالغا ما بلغ ولم يسبق اليه وتلك البراهين انما هى براهين عددية مبنية على عدديات كتاب الاسطقسات (١٠) والبرهان على الصنف الثانى بالهندسة هو هكذا (*) نضع خط $\overline{اب}$ مفروضا مساويا للعدد المفروض و $\overline{اج}$ واحدا ويكون عمودا على $\overline{اب}$ و نتمم (١١) سطح $\overline{اد}$ فمعلوم ان مساحة سطح $\overline{اد}$ يكون ذلك العدد المفروض فنعمل سطحا مربعا مساويا لسطح $\overline{اد}$ وهو مربع $\overline{ه}$ كما بينه اقليدس فى شكل يد من مقالة ب من كتابه فمربع $\overline{ه}$ يكون مثل العدد المفرود ويكون معلوما وضلعه ايضا يكون معلوما تأمل البرهان الذى أتى به (١٢) عليه اقليدس وذلك المراد وكلما قلنا عدد (13) يساوى سطحا فى هذه الرسالة فانا نعنى بالعدد هناك سطحا قائم الزوايا احد (١٤) ضلعيه واحد والثانى (15) خط مساو للعدد (16) المفروض بالمساحة وكل واحد من اجزآء مساحته مساو للضلع الثانى اعنى به الذى فرضناه واحدا (17)

---

(١) Ce passage à partir de فان manque dans C. Le Ms. B. porte بعلم au lieu de بعلمه. — (٢) ولا تلتفت B. — (3) المخلفين B. — (4) والهند C. — (5) مضروبها فى بعضها البعض manque dans A. et B. — (6) ونحوها C. — (7) تاديها C. — (8) المطلوب A. — (9) غزرنا A. B. — (١٠) عددنا C. — (١١) نتم B. C. — (١٢) به manque dans C. — (13) عددا C. الاستقصاءات C. — (١٤) واحد A. — (15) والباقى C. — (16) والعدد C. — (17) واحد C.

(*) Voyez Fig. 1.

واحد منها مبترّا (١) وسابيّنها وابرهن عليها من جهة الهندسة لا من جهة العدد والبرهان على هذه الستة لايمكن الا بخواص القطوع المخروطية واما المقترنات الرباعية (٢) فقسمان احدهما (3) وهو الاول ما يكون فيه ثلاث مراتب (4) معادلة لواحدة (5) وهو اربعة اصناف

آ كعب ومال وجذر يعدل عددا جَ كعب وجذر وعدد يعدل مالا

بَ كعب ومال وعدد يعدل جذرا دَ كعب يعدل جذرا ومالا وعددا

والقسم الثانى هو (6) ما يكون فيه مرتبتان معادلتين لاثنتين وهو ثلاثة اصناف

آ كعب ومال يعدل جذرا وعددا بَ كعب وجذر يعدل مالا وعددا

جَ كعب وعدد يعدل جذرا ومالا

فهذه هى (7) الاصناف السبعة الرباعية ولا سبيل لنا الى تحليل شىء منها (8) الا بالهندسة (9) اما من تقدمنا (10) فقد اضطر واحد منهم الى نوع من انواع صنف واحد ساذكره والبرهان على هذه الاصناف (11) لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية وسنأتى بواحد واحد (12) من هذه الاصناف الخمسة والعشرين ونبرهن عليه مستعينين بالله انه من توكل عليه مخلصا هداه وكفاه (13)

فالصنف الاول من المفردات جذر يعدل عددا فيكون الجذر معلوما باضطرار وحكمها فى العدد والمساحات واحد

والصنف الثانى عدد يعدل مالا فيكون المال العددى معلوما لمعادلته العدد (14) المعلوم ولا سبيل الى معرفة جذره بالعدد الا بالاستقراء

---

(١) مبترا A. C. مبيّزا B. — (٢) Tous ces mots à partir de الستة manquent dans B. — (3) احداهما C. — (4) مرّات B. — (5) معادلة B. متعادله الواحدة C. — (6) وهو C. — (7) هى manque dans C. — (8) منها manque dans C. — (9) بالهندسيه C. — (10) فقدمنا C. — (11) على C. — (12) هذه الاصناف manque dans A. — (13) Ces mots à partir de مستعينين sont remplacés dans C. par انشاء الله. — (14) العدد manque dans B.

للمكعب فلا سبيل لنا الى استخراج ضلعه الا بالاستقراء من حيث العدد واما من حيث الهندسة فلا ينحل الا بالقطوع المخروطية

واما المقترنات (١) فمنها ثلاثية (٢) ومنها رباعية اما الثلاثية فاثنا عشر صنفا فالثلاثة (3) الاولى منها

آ (4) مال وجذر يعدل عددا بّ مال وعدد يعدل جذرا
جّ جذر (5) وعدد يعدل مالا (6)

وهذه الثلاثة مذكورة فى كتب الجبريين ومبرهن عليها من جهة الهندسة واما من جهة العدد فلا والثلاثة الثانية منها

آ كعب ومال يعدل جذرا بّ كعب وجذر يعدل مالا
جّ جذر ومال يعدل كعبا (7)

فالجبريون قالوا ان هذه الثلاثة الثانية (8) مناسبة للثلاثة الاولى كل واحد لنظيره اعنى ان يكون كعب وجذر يعدل مالا فى قوة مال وعدد يعدل جذرا والباقيان (9) كذلك ولم يبرهنوا عليها اذا كان موضوع المسائل ممسوحات واما اذا كان موضوع المسائل عددا فذلك ظاهر من كتاب الاصول وسابرهن على الهندسى منها والستة الباقية من الاصناف الاثنا عشر

آ كعب وجذر يعدل عددا دّ كعب ومال يعدل عددا
بّ كعب وعدد يعدل (١٠) جذرا هّ كعب وعدد يعدل مالا
جّ عدد وجذر يعدل كعبا وّ عدد ومال يعدل كعبا

وهذه الستة الاصناف لم يوجد فى كتبهم منها شىء الا الكلام فى

---

(١) المقترنات B. — (2) ثلاثة C. — (3) فالثلاثة manque dans A. — (4) آ manque dans A. — (5) حذور A. — (6) مال A. — (7) كعب يعدل A. B. — (8) الثانية manque dans A et B. — (9) الباقيات C. — (١٠) وعددا تعدل C.

وما يمكن ان يبرهن عليه بخواص الدائرة اعنى بكتابى اقليدس فى الاصول وفى المعطيات يبرهن عليه ويبالغ فى التسهيل وما لا يمكن الا بخواص القطوع المخروطية فيبرهن عليه بها فى مقالتين من المخروطات واما البرهان على هذه (1) الاصناف اذا كان موضوع المسئلة (2) عددا مطلقا فلا يمكننا ولا لواحد من اصحاب الصناعة ولعل غيرنا ممن يأتى بعدنا يعرفه الا فى الثلاثة المراتب الاولى وهى العدد والشىء والمال وربما اشير الى براهين عددية على ما يمكن البرهان (3) عليه من كتاب اقليدس واعلم ان البرهان على هذه الطرق بالهندسة (4) لا يجزى (5) عن البرهان عليها بالعدد اذا كان الموضوع عددا لا مقدارا ممسوحا ألا ترى ان اقليدس قد برهن على مطلوبات نسبية مقدارية (6) فى خامسة كتابه ثم استأنف البرهان على تلك المطلوبات النسبية (7) بعينها اذا كان موضوعها عددا فى سابعة كتابه

والمعادلات بين هذه الاربعة اما مفردات واما مقترنات والمفردات ستة اصناف

آ عدد يعدل جذرا	د جذور تعدل مالا
ب عدد يعدل مالا	ه اموال تعدل كعبا
ج عدد يعدل كعبا	و جذور تعدل كعبا

وثلاثة من هذه الاصناف الستة مذكورة فى كتب الجبريين قالوا نسبة الشىء الى المال كنسبة المال الى الكعب فيلزم ان يكون معادلة المال للكعب كمعادلة الشىء للمال وكذلك نسبة العدد الى المال كنسبة الجذر الى الكعب ولم يبرهنوا عليه من (8) الهندسة واما العدد الذى يكون عديلا

---

(1) هذا C. ce mot manque dans B. — (2) موضوعه C. — (3) للبرهان C. — (4) بالهندسية C. — (5) يجزى B. يجزّى A. يجرى C. — (6) نسبته مقداررية C. مقدارية manque dans B. — (7) النسبة C. — (8) Aucun des Mss. ne porte من جهة ou من حيث.

ويجب ان يتحقق ان هذه الرسالة لا يفهمها الا من يكون متقنا لكتاب اقليدس فى الاصول وكتابه (١) فى المعطيات ومقالتين من كتاب ابلونيوس فى المخروطات وان من سدّ (٢) عنه معرفة واحد (3) من هذه الثلاثة فلا (4) سبيل له الى تحققها ولقد تكلفت ألاّ احيل (5) فى هذه الرسالة الا على هذه الكتب الثلاثة

واستخراجات الجبر انما تتم بالمعادلة اعنى بمعادلة هذه المراتب بعضها ببعض على ما هو مشهور واذا استعمل الجبرى مال المال فى المساحات فان ذلك على سبيل المجاز لا على سبيل التحقيق اذ محال ان يكون فى المقادير مال المال والذى يقع فى المقادير هو البعد (6) الواحد وهو الجذر او الضلع اذا اضيف (7) الى مربّعه ثم البعدان وهو السطح والمال فى المقادير هو السطح (8) المربع ثم الثلاثة الابعاد وهو الجسم والمكعّب فى المقادير هو المجسّم الذى يحيط به ستّ مربعات واذ لا بعد آخر فلا يقع فيها مال المال فضلا عما فوقه واذا قيل مال المال (9) فى المقادير فانما يقال ذلك لعدد اجزائها عند المساحة لا لذواتها ممسوحة وبينهما فرق فمال المال لا يقع فى المقادير لا بالذات ولا بالعرض وليس كالزوج والفرد فانهما يقعان فيها بالعرض بحسب العدد الذى ينفصل به اتصالها

والذى فى كتب الجبريين من هذه المعادلات الاربع الهندسية اعنى الاعداد (١٠) المطلقة والاضلاع والمربعات والمكعبات هو ثلاث معادلات بين (١١) العدد والاضلاع والاموال واما نحن فسنأتى بالطرق التى بها يمكن ان يستخرج المجهول بالمعادلة بين اربع (١٢) مراتب التى قلنا انها لا يمكن ان يقع اكثر منها فى المقادير اعنى العدد والشىء والمال والكعب

---

(١) كتاب C. — (٢) سد A. سد B. C. — (3) واحدة B. — (4) لا sans C. فى — C. اضيفت (7) — C. بعد (6) — C. لاحيل B. الا احصار A. الا احيل (5) — مال مال (9) — manquent dans C. والمال فى المقادير هو السطح Les mots (8) من اربعة (١٢) — B. C. من (١١) — C. اعداد (١٠) — C. B.

بالعروة الوثقى من عصمته انه ولى الاجابة وعليه التكلان فى كل حال (١)

اقول (٢) بعون الله وحسن توفيقه (3) ان صناعة الجبر والمقابلة صناعة علمية موضوعها العدد المطلق والمقادير المسوحة من حيث هى مجهولة ومضافة الى شىء معلوم به يمكن استخراجها وذلك الشىء اما كمية واما نسبة على وجه لا يشاركها فيه غيرها ويدلك (4) عليه تصفحها ومطلوبها العوارض التى تلحق موضوعَها بما هو موضوع لها بالصفة المذكورة وتمامها الوقوف على الطرق (5) التعليمية التى تتفطن (6) بها لهذا (7) النوع المذكور من استخراج (8) المجهولات العددية او المساحية والمقاديرهى الكمية المتصلة وهى اربعة الخط والسطح والجسم والزمان على ما هو مذكور مجملا فى قاطيغورياس ومفصّلا فى الحكمة الاولى وقوم (9) يعدون المكان نوعا قسيما للسطح تحت جنس المتصل والتحقيق يُبطل عليهم هذا الرأى وتصحح ان المكان هو سطح (10) بحال وموضع تحقيقه غير ما نحن فيه ولم تجر العادة بذكر الزمان فى موضوعات مسائل الجبر ولو ذكر لجاز

وعادة الجبريين ان يسموا فى صناعتهم المجهول الذى يراد استخراجه شيئا ومضروبه فى مثله مالا ومضروب ماله فيه كعبا ومضروب ماله فى مثله (١١) مال مال ومضروب كعبه فى ماله مال كعب ومضروب كعبه فى مثله كعب كعب وعلى هذا القياس بالغا ما بلغ ومعلوم من كتاب اقليدس (١٢) فى الاصول ان هذه المراتب كلها متناسبة اعنى نسبة الواحد الى الجذر كنسبة الجذر الى المال وكنسبة المال الى الكعب فيكون نسبة العدد الى الجذور كنسبة الجذور الى الاموال وكنسبة الاموال الى الكعاب وكنسبة الكعاب (13) الى اموال المال (14) بالغا ما بلغ

---

(١) Les mots فى كل حال manquent dans A. — (٢) A. (انزل) انرل — (3) Les mots بعون etc. manquent dans A. — (4) A. وبذلك — (5) C. الطوق — (6) C. يفطن — (7) B. لها — (8) C. manque dans C. — (9) A. قول — (١٠) C. السطح — (١١) Ces mots, à partir de مالا manquent dans C. — (١٢) Ici et pag. ٥, lig. 2, le Ms. A. porte اوقليدس; ailleurs اقليدس. — (١٣) Les mots وكنسبة الكعاب manquent dans C. — (١٤) A. B. الى اموال الاموال

فى زماننا هذا (١) يلبسون الحق بالباطل ولا (٢) يتجاوزون حدّ التدليس والترائى بالمعرفة ولا ينفقون (3) القدر الذى يعرفونه (4) من العلوم الا فى اغراض بدنية خسيسة وان شاهدوا (5) انسانا معيّنا بطلب (6) الحق وايثار الصدق مجتهدا فى رفض الباطل والزور وترك المراياة والخداع استخفّوه (7) وسخروا منه والله المستعان على كل حال واليه المفزع

ولما منّ الله تعالى علىّ بالانقطاع الى جناب سيدنا الاجلّ الاوحد قاضى القضاة الامام السيد ابى طاهر ادام الله علاه وكبت حسدته واعداه (8) بعد اليأس من مشاهدة كامل مثله فى كل فضيلة (9) عملية ونظرية وجمع بين (10) انفاذ (11) فى العلوم وتثبّت فى الاعمال وطلب الخير لكل واحد من ذى جنسه فانشرح بمشاهدته صدرى وارتفع بمصاحبته ذكرى (12) وعظم بالاقتباس من انواره امرى واشتدّ بآلائه ونعمه ازرى فلم اجد بدا من ان (13) انحو نحو تلافى ما فوّتنيه (14) ريب الزمان من تلخيص (15) ما اتحققه من لباب المعانى الحكميّة تقربا الى مجلسه الرفيع وابتدأت بتعديد هذه الاصناف من المقدمات الجبرية اذ (16) الرياضيات (17) اولى بالتقديم واعتصمت بحبل التوفيق من الله تعالى راجيا (18) منه ان يوفقنى لاتباع هذا بتحقيق ما انتهى اليه بحثى وبحث من تقدمنى من العلوم (19) التى هى اهم من غيرها متمسكا

---

(١) هذا manque dans A.—(٢) فلا C.—(3) ينفقون A. يتفقون B. ينفقون C. —(4) يعرفونه A. B. تعرفونه C.—(5) شاهد C.—(6) يطلب C. —(7) استسخروه C. —(8) Ces mots à partir de سيدنا sont remplacés dans le Ms. A. par فلان السيد الاجل الاوحد قاضى القضاة ابى طاهر dans le Ms. C. par les mots —. (٩) فضلة C. —(١٠) من B. —(١١) ا..اد الابعاد A. انفاد C. —(١٢) ذكر C. (١٣) ان manque dans B. —(١٤) فوتنيه A. فوسه B. فويته C. —(١٥) تخليص B. —(١٦) اذا C. —(١٧) الرياضات C. —(١٨) واحيا C. —(١٩) Le Ms. C. au lieu de من العلوم porte من القدما و من العلوم.

والمساحية (1) وان فيها اصنافا (2) يحتاج فيها (3) الى اصناف من المقدمات معتاصة جدّا فتعذّر (4) حلّها على اكثر الناظرين فيها اما المتقدمون فلم يصل الينا منهم كلام فيها لعلهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب (5) والنظر او (6) لم يضطرّ البحث اياهم الى النظر فيها او لم (7) ينقل الى لساننا كلامهم فيها واما المتأخرون فقد عنّ للماهانى منهم تحليل المقدمة التى استعملها ارشميدس مسلمة فى الشكل الرابع من المقالة (8) الثانية من كتابه فى الكرة والاسطوانة بالجبر فتأدّى (9) الى كعاب واموال واعداد متعادلة فلم يتفق له حلّها بعد ان افكر فيها مليّا (10) فجزم (11) القضآء بانه (12) ممتنع حتى نبع (13) ابو جعفر الخازن وحلها بالقطوع المخروطية ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين الى عدّة اصناف منها فبعضهم حل البعض وليس لواحد منهم فى تعديد اصنافها وتحصيل انواع كل صنف منها والبرهان عليها كلام يُعتدّ به الا على صنفين ساذكرهما (14) وانى لم ازل كنت شديد الحرص على تحقيق جميع (15) اصنافها وتمييز الممكن من الممتنع فى انواع كل صنف ببراهين لمعرفتى بان الحاجة اليها فى مشكلات المسائل ماسّة جدًّا ولم اتمكن من التجرد لتحصيل هذا الخبر (16) والمواظبة على الفكر فيه لاعتراض ما كان يعوقنى عنه من صروف الزمان فانا قد منينا (17) بانقراض اهل العلم الا عصابة قليلى العدد كثيرى المحن فعمّهم (18) افتراض غفلات الزمان ليتفرغوا (19) فى اثنائها (20) الى تحقيق (21) وايقان (22) علم واكثر المتشبهين بالحكماء

---

(1) المساحية sans و B. — (2) ما C. — (3) فيه C. — (4) معتذر C. — (5) المطلب C. — (6) و C. — (7) فيها manque dans C. ولم A. — (8) مقالة C. — (9) فنادى C. — (10) Ces mots à partir de بعد manquent dans B. — (11) فحرم A. B. فحزم C. — (12) القصال بانه B. القضاء انه C. — (13) نبع A. نبع B. تبع C. — (14) وساذكرهما C. — (15) جميع manque dans C. — (16) الخبر A. الخير B. — (17) قدمنا C. — (18) همهم C. — (19) ليفرغوا B. — (20) ابباتها (اثباتها) A. اتنانها B. ابنايها C. — (21) الحقيق C. — (22) اتقان C.

رسالة الحكيم الفاضل

غياث الدين ابى الفتح عمر بن ابراهيم الخيّامى النيشابورى (1)

قدّس الله روحه العزيز

فى البراهين على مسائل الجبر والمقابلة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والعاقبة للمتقين ولا عدوان الا على الظالمين والصلوة على الانبيآء وخصوصا على محمد واله الطاهرين اجمعين (2) ان احد المعانى التعليميّة المحتاج اليها فى جزء الحكمة المعروف بالرياضى هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعة لاستخراج المجهولات العددية

والصلوة على انبيائه اجمعين (2)—A. عما الدين عمر الخيامى النيسابورى (1)
A. Les mots ان احد par lesquels l'auteur entre en matière, sont précédés, dans le Ms. B., des seuls mots بسم الله الرحمن الرحيم ربّ يسّر الحمد لله etc. sans aucun titre; dans le Ms. C. tout ce qui ici précède les mots ان احد est remplacé par les mots suivants: مقالة فى الجبر والمقابلة للحكيم الاوحد ابى الفتح عمر ابن ابراهيم الخيامى فى الجبر والمقابلة.

مقالة
فى الجبر والمقابلة

للحكيم الاوحد

ابى الفتح عمر بن ابراهيم

الخيامى

طبع فى مدينة باريز

بمطبع الاخوين فيرمانْ ديدوةْ

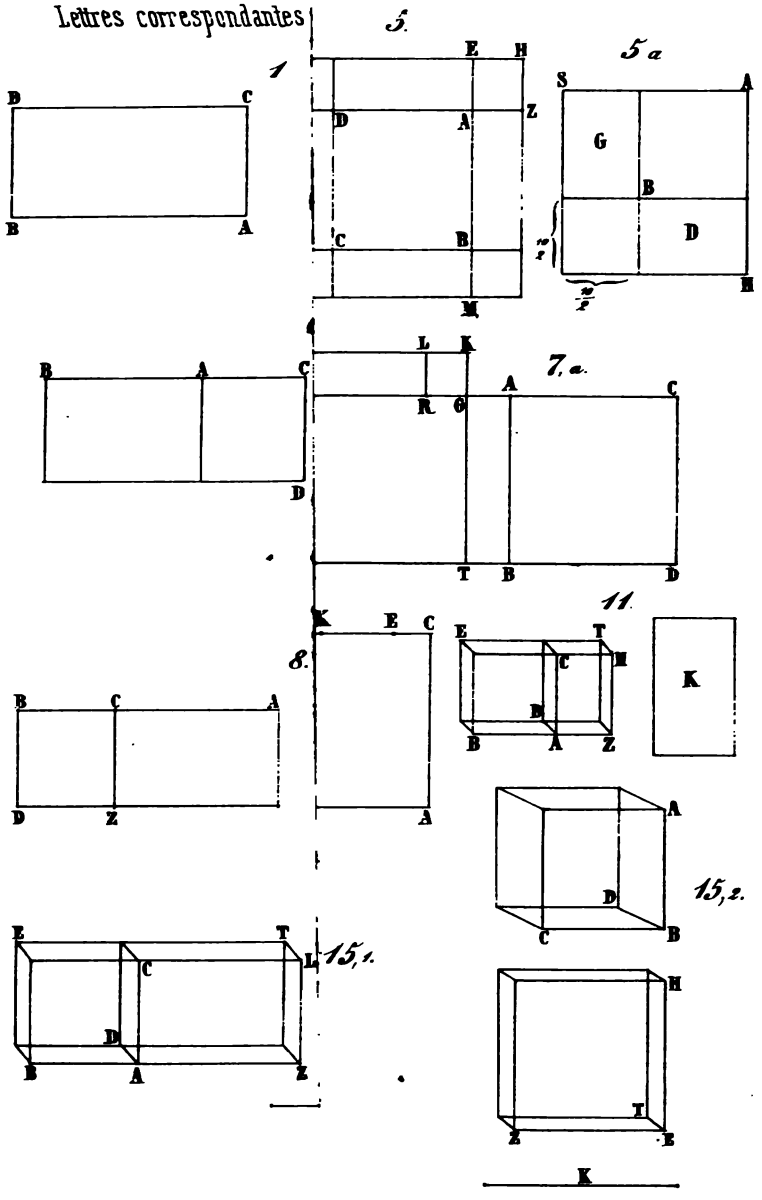
سنة ١٨٥١ المسيحية

رسالة
فى براهين الجبر والمقابلة
لعمر الخيامى

Pl. 1.

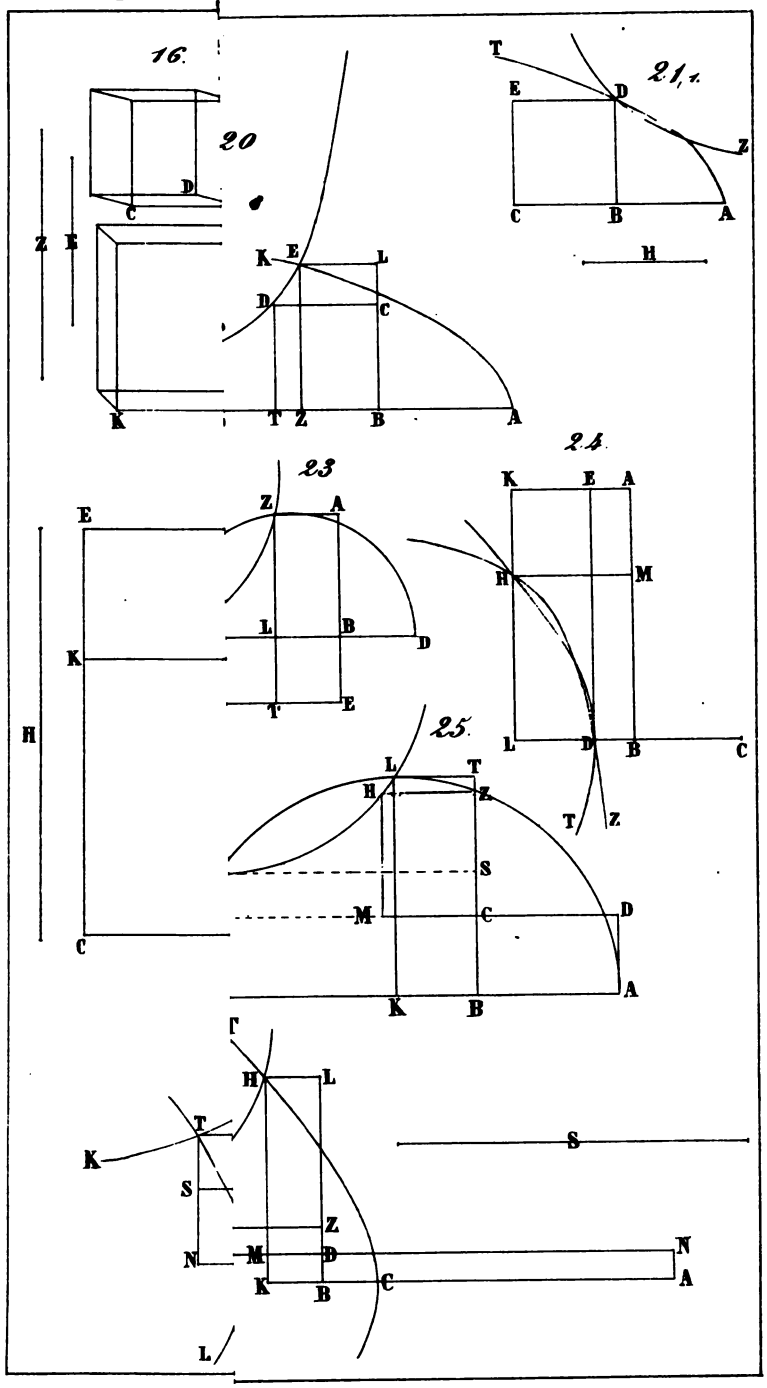
Lettres du texte arabe.

Lettres correspondantes



Imp. LEMDER, r. Ste. Anne, 18.

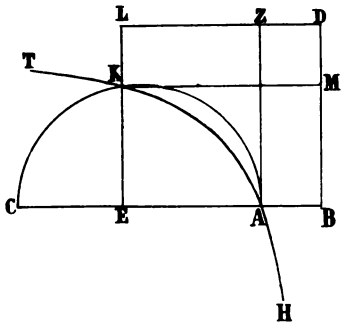
Pl. 2.



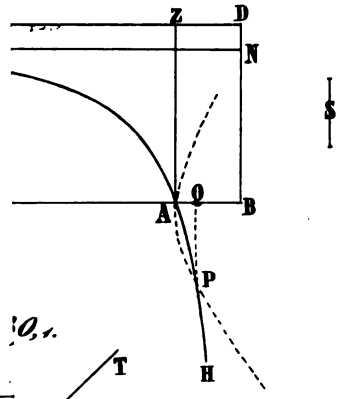
Imp. LENDER, r. Ste.-Anne, 18.

Pl. 3.

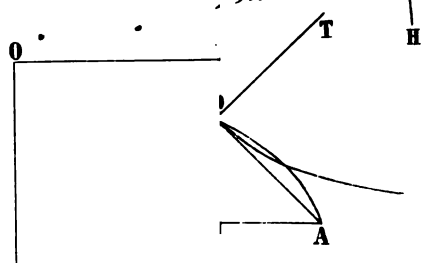
28,1.



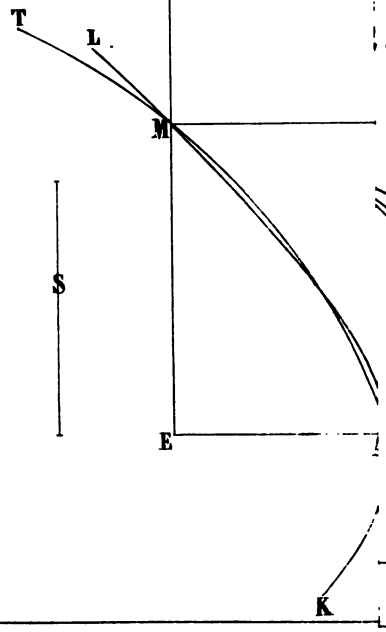
29,1.



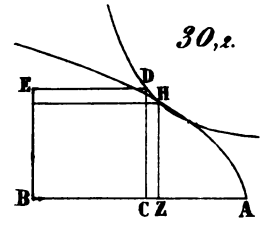
30,1.

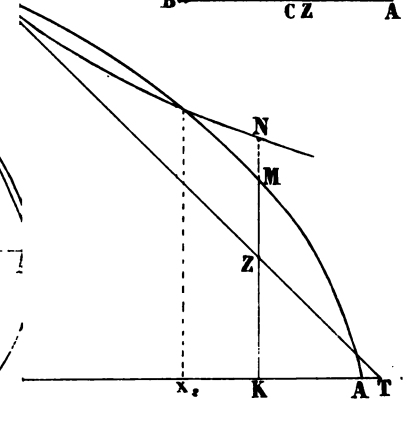


3.



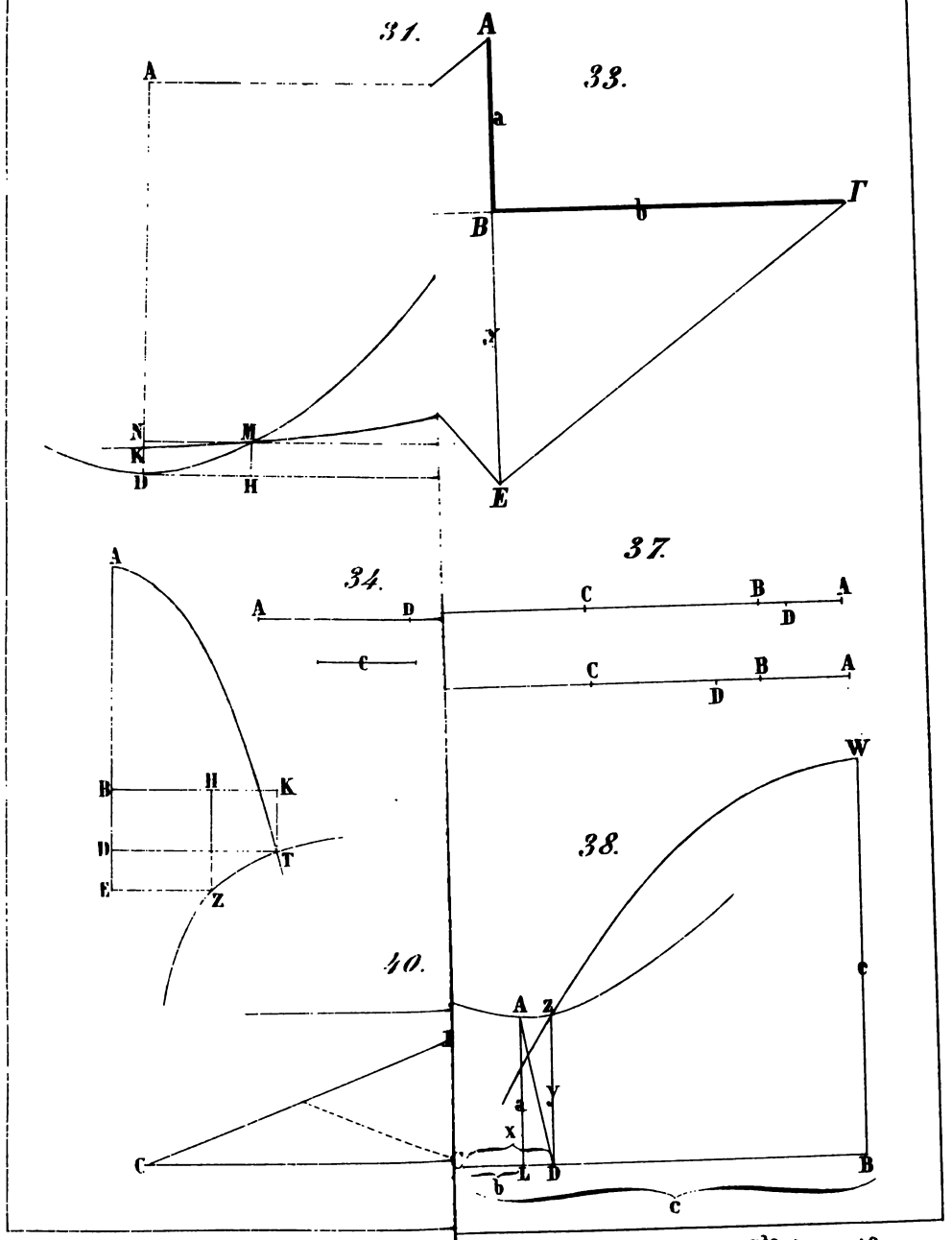
30,2.





Imp. LENDER, r. Ste-Anne, 18.

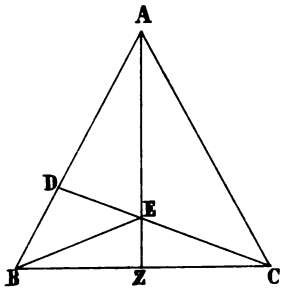
Pl. 4.



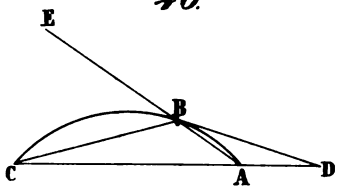
Imp. LENDER, r. Ste-Anne, 18.

Pl. 5.

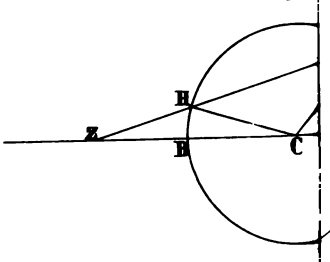
42.



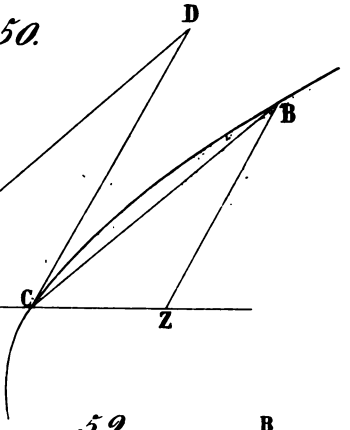
46.



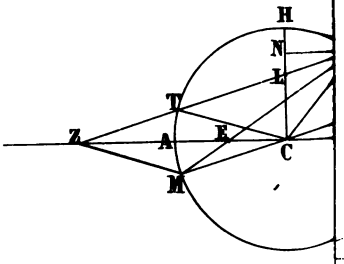
41.



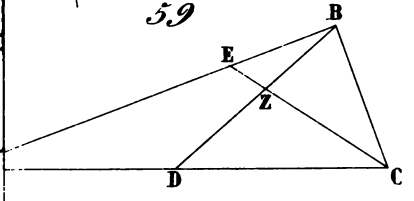
50.



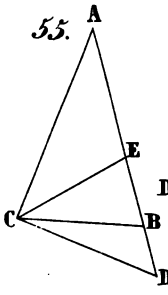
51.



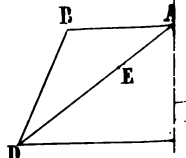
59.



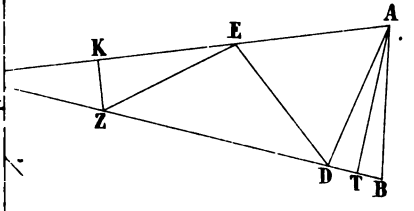
55.



56.



60.

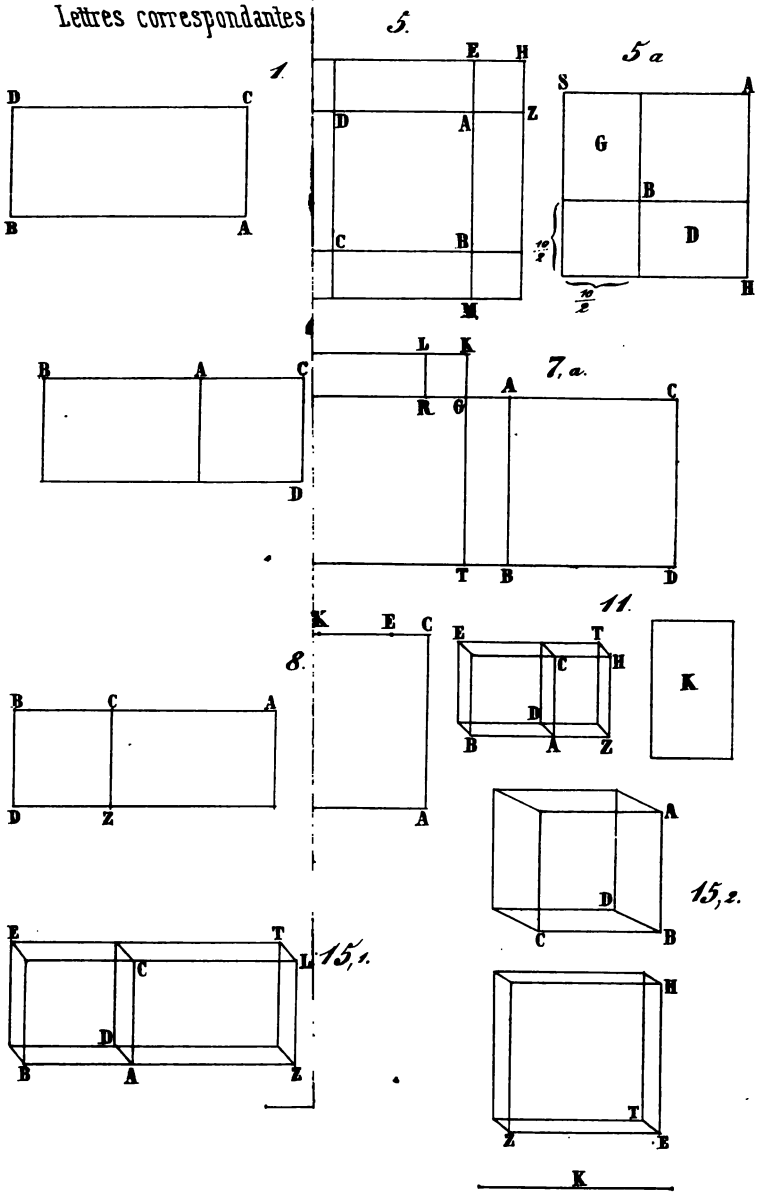


Imp. LENDER, r. Ste-Anne, 18.

Pl. 1.

Lettres du texte arabe.

Lettres correspondantes



Imp. LENDER, r. Ste Anne, 18.



